Recueil de Problèmes pour Terminales

Chikhi Salah

Août 2023

Pour toute question ou pour signaler des coquilles, n'hésitez pas à me contacter: chshrayane@gmail.com

Introduction

Le présent document propose un grand ensemble de problèmes que j'ai pu rencontrer ou auxquels j'ai réfléchi durant mes 2 années de classes préparatoires. Il est destiné à des élèves souhaitant approfondir le programme de Terminale en se creusant la tête pour établir des résultats intéressants.

La visée de ce polycopié est donc double. D'une part, il propose au lecteur de découvrir un vaste ensemble de techniques et de raisonnements par la pratique pour consolider ses acquis du lycée. D'autre part, il permettra au lecteur d'acquérir une culture mathématique grace aux divers résultats – parfois historiques – qu'il établira tout au long de la résolution des problèmes.

Se casser la tête sur ces exercices assurera une excellente préparation à des problèmes issus du Concours Général des Lycées (concours pour lequel peu de ressources, hormis les annales, existent). Par ailleurs, il peut être intéressant de se pencher sur ces problèmes en vue d'une rentrée en MPSI pour consolider ses acquis. J'insiste, ceci n'est pas du tout nécessaire, n'assurera pas votre réussite en CPGE et est contre-productif si vous n'avez pas une réelle motivation qui vous pousse à le faire. Plus généralement, ce document apprendra au lecteur comment raisonner et élaborer des stratégies face à des problèmes difficiles. Je précise, cependant, que ce document n'a pas pour but de fournir un cours au lecteur. Tout l'apprentissage se fera ici par la résolution de problèmes.

Il se décompose en trois sections distinctes. Une première section préliminaire visant à établir des résultats élémentaires qui s'avèreront cruciaux pour la résolution de certains problèmes par la suite. Une deuxième section reservée à des problèmes longs et guidés cherchant à établir un résultat intéressant comme on peut en retrouver au Concours Général. Enfin, une dernière section sera reservée à des problèmes plus ouverts qui, avouons-le, sont souvent dépourvus de réel intérêt pour les mathématiques mais qui permettent de développer une réelle intuition. Je conseille de commencer par les préliminaires. Vous pourrez ensuite procéder comme vous voulez en ce qui concerne l'ordre des exercices et des sections traitées (il est peut-être préférable d'alterner entre problèmes ouverts et problèmes guidés).

La difficulté de chaque problème sera indiquée par un nombre d'étoiles allant de $(\star)$ (sans trop de difficulté) à $(\star\star\star\star\star)$ (très difficile). Notez que l'échelle de difficulté diffère selon les sections. Vous trouverez des indications pour les questions les plus délicates mais pas de correction car elle vous empêcherait de réfléchir de manière autonome !

Conseils: comment utiliser ce document ?

Ce document contient de nombreux exercices difficiles à résoudre en sortant de Terminale: c'est normal. Vous remarquerez en effet que la plupart des problèmes ont un grand nombre d'étoiles ce qui peut être intimidant à première vue. Il est tout de même nécessaire d'essayer de les résoudre pour s'imprégner de cette aisance qui est exigée : c'est en sortant de sa zone de confort (les exercices habituels de Terminale) qu'on apprend à résoudre des problèmes compliqués. Bien sûr, il y aura tout de mêmes certains exercices avec peu d'étoiles pour vous permettre de vérifier que vous connaissez bien les bases.

L'accent est mis sur le calcul et sur la prise d'initiatives:

- Le calcul car il est un très bon indicateur de votre aisance en mathématiques. Si l'on veut à tout prix reculer face à de gros calculs, c'est que l'on est pas encore suffisamment à l'aise.
- La prise d'initiatives constitue la grosse différence avec les attendus de la Terminale. Il vous a rarement été demandé de réellement élaborer une stratégie vous-même, pourtant c'est crucial ! C'est donc ce qu'on va essayer d'apprendre ici.

Mais alors comment développer une bonne intuition pour prendre de bonnes initiatives sans avoir fait 1001 exercices ? Il s'agit bien sûr d'apprendre à raisonner et non pas d'apprendre tous les raisonnements par coeur. Pour ce faire, voici des conseils que je vous recommande d'appliquer lors de la résolution des exercices de ce document :

- Comprenez ce qu'il se passe lorsqu'on vous pose une question avant de vous lancer dans une démonstration. La plupart des résultats que vous montrerez peuvent découler d'une raison évidente (même si la preuve ne l'est pas). Il est très important d'expliciter la raison qui pousse ce résultat à être vrai avant de procéder à la preuve.
- En ce qui concerne les problèmes guidés: le sujet essaye de vous tracer un chemin ! Ayez une vue d'ensemble sur celui-ci. Il est très important de comprendre où le concepteur du sujet veut vous emmener pour voir les liens entre les questions.
- Faites des dessins ! Par exemple, un dessin du graphe d'une fonction peut se réveler salvateur face à une intégrale compliquée ou une fonction difficile à étudier (mais pas que !).

- Testez des cas particuliers et des petits cas ! On étudie la convergence d'une suite ? Calculons les premiers termes pour conjecturer la monotonie ou des inégalités sur cette dernière. Une question fait intervenir un paramètre difficile à exploiter ? Prenons un cas particulier de ce paramètre et observons ce que cela donne.

- Après avoir résolu un problème, relisez les questions du sujet. Rappelez vous de la solution que vous avez trouvée et de votre cheminement. Posez-vous les questions suivantes : Qu'est-ce que j'ai bien fait ? Qu'est-ce que j'ai mal fait ? Aurait-il été plus efficace de raisonner d'une autre manière ? Étais-je trop investi dans une direction qui m'empêchait de voir la situation dans son ensemble ? Les hypothèses proposées par l'énoncé sont-elle nécessaires ? Que se passerait-il si l'on omet une des hypothèses ?

- Bien sûr : pratiquez beaucoup. Il est illusoire de croire qu'en appliquant ces conseils, vous arriverez à résoudre tous les exercices du premier coup sans difficulté. S'il vous faut plus d'une semaine pour résoudre un problème, cela n'est pas grave du tout ! Donnez-vous les moyens et le temps de pratiquer et de chercher même si vous avez du mal. Le temps fera très bien les choses !

- Vous pouvez tout à fait traiter ce document à plusieurs ! Cela, tout en rendant la recherche plus dynamique et agréable, vous permettra de voir comment d'autres personnes réagissent face à certains exercices et d'en apprendre plus.

Il me reste à vous souhaiter une agréable session de mathématiques !

Notations :

- $\emptyset$: l'ensemble vide
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$: l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: l'ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{D}$: l'ensemble des nombres décimaux
- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des rationnels
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des réels
- $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls
- $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs
- $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des réels négatifs
- Soit x un réel et E un ensemble, on note (ici) $\mathbf{P}(x)$ une propriété qui dépend de x. Alors $\{x \in \mathbb{E} \mid \mathbf{P}(x)\}$ est l'ensemble des éléments x de E vérifiant $\mathbf{P}(x)$.
- $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels
- $\mathbb{Q}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels
- Si X et Y sont deux ensembles, Y^X est l'ensemble des fonctions de X dans Y
- $\mathbf{C}(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions continues de X dans Y
- i.e : locution latine "id est" signifiant "c'est-à-dire"
- $\in$: symbole d'appartenance (à un ensemble)
- $\subset$: symbole d'inclusion
- $\wedge$: le "et"
- $\vee$: le "ou"
- $\neg$: la négation

Préliminaires

L'objectif de cette section est d'établir certains résultats qui nous serviront pour attaquer quelques problèmes par la suite. Il s'agirait, pour le lecteur, d'avoir en tête (au moins) l'existence de ces résultats pour pouvoir jeter un oeil au préliminaires et piocher ce dont il a besoin. Avec le temps, le lecteur arrivera à bien mémoriser ces mêmes résultats.

1. Rédaction et quantificateurs.

Rédaction

Votre manière de rédiger en mathématiques est cruciale. Évidemment, elle l'est dans un concours pour rendre compte de votre pensée de la manière la plus claire et concise possible. Toutefois, on oublie souvent qu'en rédigant correctement, on se facilite la tâche en visualisant parfaitement et clairement les différents cheminements de notre raisonnement. A ce titre, je vous propose ici quelques conseils de rédaction et quelques erreurs à éviter:

- S'il y a une chose à retenir, c'est bien la chose suivante : tout objet que vous utiliserez doit être introduit. En effet, il est facile de se perdre dans les notations lorsque celles-ci sont dures à identifier ou lorsqu'elles ne sont, tout simplement, pas déclarée du tout. On commencera donc la plupart de nos raisonnements, en guise d'exemple, par "Soit x un réel. On a alors $f(x) = x\cos(x)$.", "Soit $n \in \mathbb{N}$", "Soit A l'ensemble des nombres pairs pouvant s'écrire comme la somme de deux nombres premiers". Pour varier, on pensera à utiliser "Fixons $x \in [0,1]$" ou encore (un peu plus grossier) "Pour tout $x \in [0,1]$". Une fois déclarée, votre variable existe et il n'est plus nécessaire de l'introduire si vous la réutilisez.

- Pensez toujours à énoncer les hypothèses que vous utilisez avant d'employer un théorème. Lorsqu'il s'agit d'un concours, il est bien de faire une liste claire et aérée des hypothèses que vous utilisez. Ainsi, on pourra rédiger l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires de la manière suivante :

  Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Remarquons que:

  - $f(a) > 0 > f(b)$.
  - f est continue.

  Ainsi, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de / il existe $c \in]a,b[$ tel que f(c) $= 0$.

- Il est capital de rédiger et non pas de proposer une suite de calculs incompréhensible et non commentée. Votre raisonnement doit apparaître clairement et l'on doit pouvoir comprendre tout votre cheminement sans lire vos calculs.

- Il est parfois pratique de donner des noms à certaines quantités, surtout lorsqu'on effectue de gros calculs. Ne vous sentez pas obligé de le faire, mais cela peut rendre la rédaction plus claire et plus fluide. A l'inverse, attention à ne pas employer tout l'alphabet latin et grec au bout de 3 lignes de rédaction... Voici un exemple :

  On cherche à calculer la dérivée de la fonction

  $$f : x \mapsto \frac{e^a - 1}{(a^{\ln(3)} - \cos(u\pi))e^{2x}} \sqrt{\cos(\frac{x}{2})}$$

  où a et u sont des réels.

  f est dérivable sur $] - \pi, \pi[$ en tant que produit et de fonctions dérivables sur $] - \pi, \pi[$. Soit alors $x \in] - \pi, \pi[$. Posons $g(x) = \frac{\sqrt{\cos(\frac{x}{2})}}{e^{2x}}$ / soit g la fonction définie pour tout $x \in] - \pi, \pi[$ par $g(x) = \frac{\sqrt{\cos(\frac{x}{2})}}{e^{2x}}$. Posons alors $K = \frac{e^a - 1}{a^{\ln(3)} - \cos(u\pi)}$.

  Dès lors, $f(x) = Kg(x)$. Or, pour tout $x \in] - \pi, \pi[$

  $$\begin{aligned} g'(x) &= \text{(Vos calculs)} \\ &= \text{(Suite de vos calculs)} \\ &= -\frac{e^{-2x}(\sin(\frac{x}{2}) + 8\cos(\frac{x}{2})}{4\sqrt{\cos(\frac{x}{2})}} \end{aligned}$$

  Dès lors, pour tout $x \in] - \pi, \pi[$:

  $$f'(x) = -K\frac{e^{-2x}(\sin(\frac{x}{2}) + 8\cos(\frac{x}{2})}{4\sqrt{\cos(\frac{x}{2})}}$$

  Cet exemple est particulièrement détaillé et il n'est pas nécessaire d'en faire autant, surtout lorsque l'on a déjà fait un grand nombre de questions dans un sujet. Cependant, il peut être bien de rédiger de cette manière au tout début du sujet en guise de premier contact avec le correcteur. On peut aussi noter que les lettres utilisées pour les notations ne sont pas aléatoires : K représente une constante, f une fonction, x, u des réels ou encore z un nombre complexe. Rendez les choses claires pour vos lecteurs

!

Vous remarquerez par ailleurs que l'on parle de la fonction f et non pas de la fonction $f(x)$. Vous ne manquerez pas de mettre votre correcteur (ou tout lecteur) en colère en parlant d'une fonction $f(x)$ ou d'une suite u_n (au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n)). En effet, $f(x)$ est un réel : l'image par la fonction f du réel x, ce n'est donc pas une fonction (de même pour les suites). Ainsi, $f(x)$ ne peut pas être croissante vu que c'est un réel: c'est bien f qui est croissante.

- Attention à ne pas invoquer des objets issus de votre imagination. Assurez-vous de leur existence avant de les déclarer. Lorsque cette existence n'est pas évidente, il est sûrement attendu de votre part une preuve de cette dernière. On évitera donc toute phrase de la forme "Soit c l'unique réel de $]0,1[$ vérifiant $f(c)=0$" sans preuve d'existence et d'unicité.

- Attention à l'utilisation des symboles $\implies$ et $\iff$. Voici un exemple de ce qu'il faut éviter :

Soit x un réel. On a $f(x)=\dfrac{e^{\cos(x)}}{e^{-2\cos(x)}}+3\dfrac{2x+4}{2}$. Simplifions cette écriture :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{\cos(x)}}{e^{-2\cos(x)}}+3\frac{2x+4}{2} \\ \iff f(x) &= e^{\cos(x)+2\cos(x)}+3(x+2) \\ \iff f(x) &= e^{3\cos(x)}+3x+6. \end{aligned}$$

Ce n'est pas ce que vous voulez dire. $\Longleftarrow$ n'est pas un synonyme du mot "donc" qui est le mot que vous voulez utiliser. Je sais que la propriété A est vraie et que $A \iff B$ donc B. Ainsi la notation $A \iff B$ n'engage en rien la véracité de A mais signifie simplement que si A est vraie, alors B est vraie et réciproquement. Dans notre exemple, on savait déjà ce que valait $f(x)$, la première égalité est donc quelque chose que l'on sait vrai et qui nous mène à d'autres expressions elles aussi vraies. De même pour le signe $\implies$: $A \implies B$ signifie que si A est vrai, alors B l'est aussi et non pas "A est vrai, donc B aussi".

Voici un exemple correct d'utilisation de ce symbole :

On cherche à déterminer les réels x tels que $f(x)\geq 0$. On sait par ailleurs que pour tous réels x, $f(x)=x^2-x$. Or:

$$f(x)\geq 0 \iff x^2-x\geq 0 \iff x(x-1)\geq 0 \iff x\in]-\infty,0]\cup[1,\infty[$$

On en déduit que les réels x tels que $f(x)\geq 0$ sont exactement les éléments de $]-\infty,0]\cup[1,\infty[$. On peut donc remarquer que l'on associe aucune notion de véracité à la propriété initiale ($f(x)\geq 0$). On cherche simplement à savoir à quoi elle équivaut. Attention, ce symbole, contrairement à $\implies$ vous engage ! En écrivant $A \iff B$, vous dites que A implique B ET que B implique A: attention à toujours vérifier que cela est vrai, et, dans des cas non évidents, à le démontrer. A l'inverse, $A \implies B$ signifie simplement que A implique B: si A est vrai alors B l'est aussi.

Quantificateurs

Nous allons ici expliquer comment utiliser certains outils de rédaction souvent utiles.

Le symbole $\forall$ signifie "pour tout"/"quel que soit". Il peut être utilisé pour introduire vos variables. Voici un exemple:

On étudie une fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 3e^{2x}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6e^{2x}$$

Cela signifie donc que, peu importe le choix du réel x, $f'(x)$ vaut $6e^{2x}$.

Venons-en au symbole $\exists$: le symbole d'existence. Celui-ci permet d'annoncer l'existence d'une variable vérifiant une certaine propriété que vous décrirez. Un exemple que l'on rencontre souvent en Terminale est celui de l'application du théorème des valeurs intermédiaires:

On se donne une fonction f continue sur un intervalle I. On suppose que l'on dispose de réels $a < b$ dans I tels que :

$$f(a) \leq 0 \leq f(b)$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure dès lors l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que:

$$f(c) = 0.$$

Autrement dit:

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid f(c) = 0.$$

Si l'on a aussi unicité du réel c, on peut écrire : $\exists! c \in \mathbb{R}$, le point d'exclamation signifiant l'unicité. En voici un cas concret reprenant l'exemple précédent :

Supposons par ailleurs f strictement croissante sur I. Un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure :

$$\exists! c \in \mathbb{R} \mid f(c) = 0.$$

Remarquez que l'on a séparé le texte et l'utilisation des quantificateurs. En effet, il est très malvenu d'introduire vos quantificateurs dans une rédaction en français. Il est possible de rendre la rédaction plus claire en faisant un retour à la ligne pour bien marquer la séparation du texte. En revanche, évitez de trop utiliser ces quantificateurs et préférez le plus souvent une phrase concise.

Notez par ailleurs qu'en déclarant vos variables avec un tel quantificateur, vous leur accordez une existence éphémère. En effet, la variable que vous déclarez (x dans notre exemple) n'existera que pour quelques lignes (le temps du calcul suivant l'emploi du quantificateur, ou simplement dans la ligne où vous utilisez le quantificateur). Il faudra, dans la suite de votre raisonnement, déclarer cette même variable à nouveau. A l'inverse, Une déclaration en français de vos variables (soit $x \in \mathbb{R}$, fixons $x \in \mathbb{R}$) vous permet de conserver vos variables durant tout le raisonnement.

Enfin, il est important de noter que l'ordre des quantificateurs est important. Ainsi, si (u_n) est une suite :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid u_n \leq N$$

Ne signifie pas la même chose que :

$$\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall N \in \mathbb{N}, u_n \leq N.$$

Dans le premier cas, n dépend de N: à chaque N est associé un n vérifiant la propriété, mais ce n n'est pas universel. Dans le deuxième cas, n ne dépend pas de N: peu importe la valeur choisie pour N, la même valeur de n vérifiera la propriété.

Un dernier mot pour ceux qui passent certains concours: pensez à encadrer vos résultats à chaque fin de question !

2. Techniques de base en analyse.

On s'intéresse dans cette partie aux fonctions usuelles rencontrées en Terminale, à savoir la fonction exponentielle et le logarithme. On regarde ensuite le théorème clé de l'analyse de Terminale qui est le **théorème des valeurs intermédiaires**. Enfin on s'intéresse aux nombres réels et aux entiers.

L'objectif de cette partie qui contient plusieurs notions n'ayant à priori pas de lien est de vous fournir les notions de base qui nous seront nécessaires pour la suite.

2.1. Fonctions usuelles

La fonction exponentielle notée exp ou $x \mapsto e^x$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e = 2.718\ldots$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; e^x \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exp'(x) = \exp(x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; e^{x+y} = e^x e^y$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$, en particulier $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

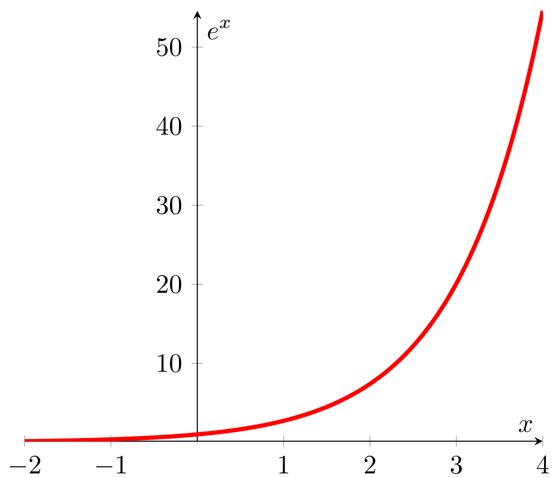


Figure 1 - La fonction exp

Une fonction liée à la fonction exponentielle est la fonction logarithme népérien, notée ln. On dit qu'il s'agit de la "bijection réciproque" de la fonction exponentielle. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\ln(1) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \;\; \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*} \;\; \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(x^y) = y \ln(x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*} \;\; \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$, en particulier $\ln(1/x) = -\ln(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln(x)} = x$ (P1)
- $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\quad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$.

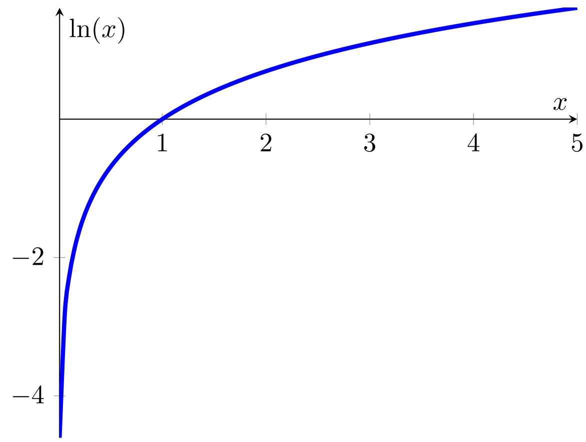


Figure 2 - La fonction ln

La propriété (P1) traduit le fait que ces fonctions sont réciproques l'une de l'autre. On le voit graphiquement car les deux graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

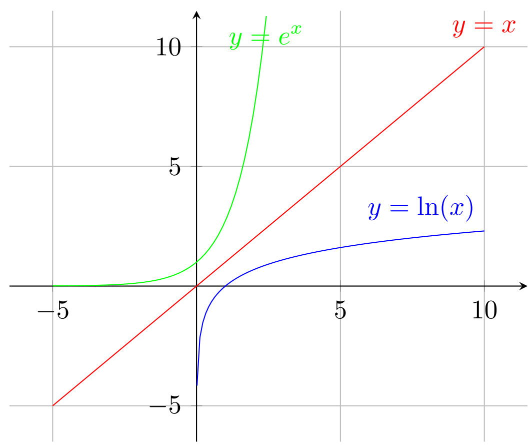


Figure 3 - Illustration de (P1)

2.2. Entiers et factorielles

La notion de partie entière d'un réel x est à connaître. Elle est notée $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$. Il s'agit du plus grand entier inférieur à x. En particulier, $\lfloor x \rfloor$ est l'**UNIQUE** entier p vérifiant :

$$p \leq x < p + 1.$$

La notion de factorielle aussi est à connaître. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n \text{ et } (n+1)! = (n+1)n!$$

On rappelle que :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et que } 0! = 1.$$

D'un point de vue combinatoire, qui sera étudié plus tard, $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments.

2.3. Le théorème des valeurs intermédiaires

L'un des théorèmes clés en analyse en Terminale est **théorème des valeurs intermédiaires**. Il s'énonce ainsi:

Soit f une fonction définie et **CONTINUE** sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

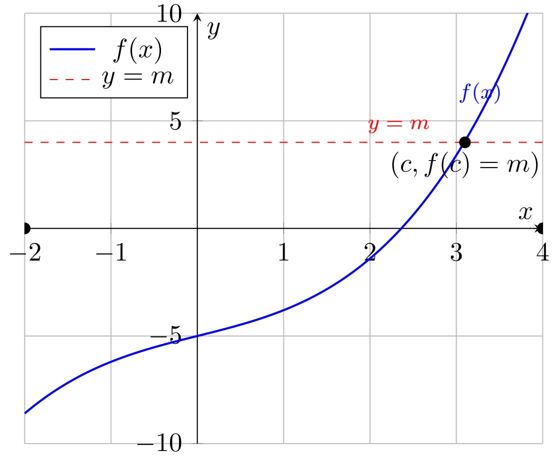
Si, de plus, f est **strictement monotone** sur $[a, b]$, c est unique.

Exemple: Voici une application simple:

Soit, pour tout réel x, $f(x) = 0.2x^3 + x - 5$. Remarquons que:

- $f(-2) = -8.6$
- $f(4) = 11.8$
- f est continue car polynomiale
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions strictement croissantes

Ainsi, pour tout $m \in [-8.6, 11.8]$, il existe un unique $c \in [-2, 4]$ tel que $f(c) = m$. En voici une illustration :



Exemple: Voici un exemple plus complexe. Utilisons ce théorème pour montrer que l'équation :

$$x^4 - x^2 + 2x = 1 \text{ (E)}$$

admet exactement deux solutions réelles: l'une négative, l'autre positive.

Posons, pour tout réel x, $f(x) = x^4 - x^2 + 2x - 1$. Il s'agit de trouver les racines de la fonction polynomiale f.
Pour ce faire, nous allons étudier les variations de f. Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = 4x^3 - 2x + 2.$$

On remarque qu'il est assez dur d'étudier le signe de f'... Nous allons donc redériver et en déduire les variations de f' ce qui nous donnera son signe ! Pour tout réel x:

$$f''(x) = 12x^2 - 2$$

On en déduit le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f'	$-\infty$	$\nearrow$	$2 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} > 0$	$\searrow$	$2 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} > 0$	$\nearrow$	∞

Nous allons maintenant en déduire le signe de f'. D'après le tableau de variations, pour tout réel $x \in [\frac{1}{\sqrt{6}}, \infty[$, $f'(x) > 0$. Il reste à étudier cette fonction sur $]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{6}}]$. Remarquons alors que:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty < 0$
- $f'(-\frac{1}{\sqrt{6}}) > 0$
- f' est continue car polynomiale
- f' est strictement croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe un unique $\alpha \in]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Remarquons alors que $f'(-1) = 0$ et que $-1 \in]-\infty, -\frac{-1}{6}]$. Cela montre que $-1 = \alpha$ car α est l'unique racine de f' sur cet intervalle.

Comme f' est strictement croissante sur cet intervalle, $f'(x)$ est négatif pour $x < \alpha$ et positif pour $x \in [\alpha, -\frac{1}{6}]$. On en déduit finalement :

x	$-\infty$		$\alpha = -1$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	∞	$\searrow$	$f(-1) = -3$	$\nearrow$	∞

On peut désormais conclure:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty > 0$
- $f(-1) = -3 < 0$
- f est continue
- f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$

Le théorème des valeurs intermédiaires fournit donc l'existence et l'unicité de $a \in]-\infty, -1]$ tel que $f(a) = 0$. En particulier $a < 0$.

Par ailleurs, $f(0) = -1 < 0$. Comme f est strictement croissante sur $[-1, 0]$, on en déduit que f est strictement négative sur $[-1, 0]$ et donc qu'elle ne s'y annule pas. En appliquant alors le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0, \infty[$, on en déduit de même l'existence de $b > 0$ tel que $f(b) = 0$.

Finalement, on a trouvé les seules solutions réelles de (E), l'une étant négative et l'autre positive.

2.4. Exercices

Exercice 2.1. Calculez les parties entières suivantes :

- $\lfloor 3.4 \rfloor$
- $\lfloor \pi \rfloor$
- $\lfloor e \rfloor$
- $\lfloor \sqrt{45} \rfloor$
- $\lfloor -\pi \rfloor$
- $\lfloor -3.5 \rfloor$

Exercice 2.2. Simplifiez les expressions suivantes:

- $\ln(e^3)$
- $\ln(4) + \ln(2) - \ln(3)$
- $\ln(\dfrac{e^x}{e^{2x}})$ où x est un réel
- $e^{2\ln(\sqrt{2})}$
- $\ln(8) - \ln(16) + \ln(32) - 3\ln(\sqrt[3]{8})$

Exercice 2.3. Dans la suite, n est un entier naturel. Simplifiez les expressions suivantes:

- $\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}$ pour $n \geq 3$
- $\dfrac{(2n)!}{n!} - \dfrac{6n!}{2}$
- $\dfrac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-1}}$
- $\ln(n!) - 2\ln(3n!) - 4\ln((n+2)!)$

Exercice 2.4. Étudiez la monotonie de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{2^n}{n!}$$

Exercice 2.5. Soit x un réel. Montrez que :

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

Exercice 2.6. Soit x un réel. Montrez que :

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$$

Exercice 2.7. Soit n un entier naturel et $1 \leq k \leq n$ un entier. Montrez que :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 2.8. Montrez que, si n est un entier naturel :

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \cdots \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Exercice 2.9. Soit x, y des nombres réels positifs. Montrez que :

$$2\sqrt{xy} \leq x + y.$$

Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 2.10. Soit m un réel. Combien de solutions l'équation suivante admet-elle ?

$$x^2 + mx + 1 = 0$$

Exemple: L'exercice qui suit propose de trouver les racines d'un polynôme de degré 3. Voyons, sur un exemple, la démarche à suivre.

Intéressons nous à l'équation $P(x) = 0$ où $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. L'objectif est de deviner une solution de cette équation de tête: on appelle cette solution une "racine évidente". La plupart du temps, on la cherchera sous la forme d'un entier relatif.

En revanche, il est inutile de tester n'importe quel entier relatif. En effet, un théorème (dont vous pourrez trouver la preuve en annexe de ce polycopié) stipule qu'une racine entière de P doit diviser le terme constant du polynôme, ici -2. Or, les diviseurs de -2 sont :

$$-2, -1, 1, 2$$

Ainsi il est inutile de chercher une racine évidente en dehors de ces entiers. Cherchons donc, parmi ces entiers, une racine :

- $P(-1) = -2 - 3 - 3 - 2 = -10 \neq 0$ donc -1 n'est pas une racine de P
- $P(1) = 2 - 3 + 3 - 2 = 0$ donc 1 est racine de P

Maintenant que nous avons trouvé une racine évidente (l'entier 1), il s'agit de factoriser P. Un théorème nous indique que si r est racine d'un polynôme P, alors P est factorisable par $x - r$. On va donc chercher des réels a, b, c tels que :

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

(Plus généralement, si r est racine de d'un polynôme de degré 3 P, on cherchera a, b, c tels que $P(x) = (x-r)(ax^2 + bx + c)$)

Pour trouver a, b et c, on développe cette nouvelle forme de P et on identifie les coefficients. En effet:

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + x^2(-a+b) + x(-b+c) - c$$

Or $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. On prendra donc $a = 2$ puis $-a + b = -3$ donc $b = -3 + a = -1$ et enfin $c = 2$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(2x^2 - x + 2)$$

Ainsi, les solutions de l'équation de départ sont les racines de $x - 1$ et de $2x^2 - x + 2$. On savait déjà que 1 était solution de l'équation, il reste à étudier $2x^2 - x + 2$. Ce polynôme du second degré a un discriminant Δ qui vaut $-15 < 0$. Il n'a donc pas de solutions réelles.

Ainsi, la seule solution réelle de l'équation $P(x) = 0$ est 1. Le lecteur pourra essayer de déterminer les solutions complexes de cette équation.

Exercice 2.11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

- $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$
- $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0$
- $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$

Exercice 2.12. Soit $p \in \mathbb{N}$. Étudiez l'ensemble des solutions de l'équation :

$$e^x = 2 - x^p.$$

Exercice 2.13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$e^{2x} = e^x + 1$$

Exercice 2.14. Trouvez tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que :

$$a^b = b^a$$

Exercice 2.15. Soit x, y, z des réels strictement positifs tels que $x + y + z = 1$. Montrez que :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3}.$$

3. Symboles somme et produit.

3.1. Notations :

Étant donné une suite de nombres complexes (a_n) et $n \in \mathbb{N}$, on notera :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 a_1 \dots a_n$$

Le premier est le symbole somme et le deuxième le symbole produit. Ces derniers permettent d'alléger les notations lorsque l'on calcule certaines quantités et nous permettant de nous défaire de la notation qui utilise "...". Dans chacun des cas, la borne au bas du symbole ($k = 0$ dans notre exemple) indique l'indice auquel commencer la somme. Ici on commence à $k = 0$ donc le premier terme sera a_0. On termine avec l'entier indiqué dans la borne du haut, ici n d'où le dernier terme a_n. Voici quelques exemples :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$

- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+4} e^k = e^2 e^3 \dots e^{n+3} e^{n+4} = e^{\sum_{k=2}^{n+4} k}$

3.2. Propriétés:

Étudions certaines de leurs propriétés :

La somme est dite linéaire. En effet, étant donné $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et $(a_n),(b_n)$ deux suites de nombres complexes:

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k + \mu \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Le produit, lui, est hautement non linéaire. En revanche, il vérifie aussi certaines propriétés :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k b_k = \prod_{k=0}^{n} a_k \prod_{k=0}^{n} b_k \text{ et } \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$$

On notera les faits suivants qui sont parfois utiles:

- Si $b > a$ sont des entiers, alors $\displaystyle\sum_{k=b}^{a} a_k = 0$

- Si $b > a$ sont des entiers, alors $\displaystyle\prod_{k=b}^{a} a_k = 1$

- Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx$$

  (Valable, à priori, que pour des sommes finies)

- si E est un ensemble fini, alors

$$\sum_{k \in E} a_k$$

  Correspond à la somme des a_k où k varie dans E. Autrement dit, on somme tous les a_k lorsque k décrit E .

3.3. Changement d'indice:

Étudions à présent le changement d'indice. Vous serez parfois confrontés à des sommes dont les bornes ne vous conviennent pas où dont les termes sont translatés. Il est possible de se ramener à des sommes plus convenables grâce à un changement d'indice. Voici quelques exemples illustrant cela :

Étant donné une suite (a_n) de nombres complexes et $n \geq 2$ un entier, on considère $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_{k-2}$. On peut remarquer que cette somme a une borne qui commence à 2 et des termes dont les indices sont translatés de 2. Posons alors $l = k - 2$.

Lorsque k commence à 2, on a $l = 2 - 2 = 0$. Par ailleurs, lorsque k atteint n, on a $l = n - 2$. Cela permet dès lors d'écrire :

$$\sum_{k=2}^{n} a_{k-2} = \sum_{l=0}^{n-2} a_l$$

On peut vérifier que cela fonctionne, en effet :

$$\sum_{k=2}^{n} a_{k-2} = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-2} = \sum_{l=0}^{n-2} a_l$$

Remarquez alors que les bornes ont changé et que les termes en indice aussi. Il suffit donc de regarder le premier et le dernier indice de la somme et de ne pas oublier de modifier les termes de la somme.

Attention à ne pas effectuer n'importe quel changement d'indice. Un changement d'indice tel que $l = 2^k$ n'aurait pas de sens car l'on atteindrait pas toutes les valeurs souhaitées. En général, les changements d'indice prendront la forme $l = k - a$ où a est un entier.

Exemple: Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Commençons déjà par poser, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. Grâce au changement d'indice $l = n - k$, nous obtenons :

$$S_n = \sum_{l=0}^{n}(n-l) = \sum_{k=0}^{n}(n-k) \text{ car le nom de l'indice n'importe pas.}$$

Mais alors:

$$S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k)$$

Autrement dit, par linéarité de la somme:

$$2S_n = \sum_{k=0}^{n}(k + (n-k)) = \sum_{k=0}^{n} n = (n+1)n$$

D'où finalement:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On en déduit immédiatement par linéarité que $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$

3.3. Complément: Sommes multiples

Il est possible de rencontrer des sommes dites "multiples", autrement dit des sommes imbriquées dans d'autres. Nous nous intéresserons principalement aux sommes doubles qui nécessiteront donc 2 indices. Voici une première définition d'une telle somme, étant donnée une suite complexe à deux indices $(a_{k,p})_{(k,p)\in\mathbb{N}^2}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{k,p} = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{p=1}^{m} a_{k,p})$$

Il faut comprendre que l'on somme tous les termes de la forme $a_{k,p}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq p \leq m$. Dans la somme intérieur, l'indice de la somme extérieure (ici k) est fixé et on peut le voir comme une constante.

Voici un exemple concret:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} kp = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{p=1}^{n} p = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Par ailleurs, les sommes intérieures peuvent commencer à un indice qui dépend de l'indice de la somme extérieure, par exemple:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{n} a_{k,p} \text{ que l'on note aussi } \sum_{1\leq k\leq p\leq n} a_{k,p}.$$

En guise d'exemple :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{n} p = \underbrace{(1+2+\cdots+n)}_{k=1} + \underbrace{(2+3+\cdots+n)}_{k=2} + \cdots + \underbrace{(n-1+n)}_{k=n-1} + \underbrace{n}_{k=n}$$

Voici quelques autres exemples de sommes doubles:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\sum_{p=2}^{3} 2 = (2+2)+(2+2)+(2+2)+(2+2) = 16$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\sum_{p=1}^{n} p = \sum_{k=1}^{6} \frac{n(n+1)}{2} = 6\frac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1)$
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\sum_{p=1}^{n} k^p = \sum_{k=2}^{n} \frac{1-k^n}{1-k}$ (cette formule est démontrée dans les exercices)

Nous allons ici énoncer une propriété essentielle à retenir et qui permet de résoudre l'essentiel des exercices sur les sommes doubles.

Propriété: Permutation de sommes

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} a_{k,p} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{k,p}.$$

Autrement dit, on peut permuter des sommes doubles (pour peu que celles-ci soient finies). Attention à bien changer le début et la fin des indices lorsque ces derniers sont interdépendants, par exemple:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{n} a_{k,p} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{k,p}$$ car p varie de 1 à n tout en étant toujours plus grand que k.

Exemple: Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{i}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{i}{k+1}$$

On a permuté les sommes car cela permet en fait de calculer plus simplement la somme. En effet, on obtient:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}k = \frac{n(n+1)}{4}$$

Voici enfin une dernière propriété sur les sommes doubles qui peut servir à ne pas dire de bêtises !

Propriété: Multiplication de sommes :

Étant donné deux suites complexes (a_n) et (b_n):

$$(\sum_{k=1}^{n}a_k)\times(\sum_{k=1}^{n}b_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}a_kb_p = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_p.$$

Autrement dit, un produit de deux sommes donne une somme double ! Voici un exemple où l'on recalcule une somme déjà calculée de manière plus rapide:

Exemple: Calculons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}kp &= (\sum_{k=1}^{n}k)(\sum_{p=1}^{n}p)\\ &= (\sum_{k=1}^{n}k)^2\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

3.4. Exercices:

Exercice 3.1. Retrouvez le résultat précédent par récurrence. (On utilisera systématiquement le symbole $\sum$).

Exercice 3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculez :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \text{ et } \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2}k+8n)$$

Exercice 3.3. Montrez les résultats suivants:

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 3.4. (A connaître)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et n un entier strictement positif. Montrez que:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=u_n-u_0$$

2. (Application) En déduire que, si $q\in\mathbb{C}-\{1\}$:

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On multipliera les deux membres de cette égalité par $1-q$. Que dire quand $q=1$?

3. (Application) Trouvez $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, P(n+1)-P(n)=n^2$$

Retrouvez alors la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2$

Remarque: On notera, de manière analogue à la question 1, que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{u_{n+1}}{u_0}$. On parle de sommes et de produits télescopiques.

Exercice 3.5. Retrouvez la formule du binôme.

$$\forall a,b\in\mathbb{C}, (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\text{ puis de }\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\text{ et }\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}$$

Exercice 3.6. Montrez que :

$$\forall a,b\in\mathbb{C},\forall\ n\in\mathbb{N},\ \ a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k}$$

En déduire que si p n'est pas premier, alors 2^p-1 non plus.

Remarque: Les entiers de la forme 2^p-1 sont appelés *nombres de Mersenne*. On a longtemps pensé que ces entiers, lorsque p est premier, étaient premiers. En réalité il n'en est rien : $2^{47}-1$ est divisible par 2351. D'ailleurs, à l'aide d'un algorithme du nom de la *Méthode de Fermat*, on parvient à factoriser ce nombre très (très) grand ! Affaire à suivre...

Exercice 3.7. Calculez les sommes et produits suivants:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)(k+2)} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx+1) \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$$

$$\prod_{k=0}^{n} 2^{3k} \qquad \prod_{k=0}^{n} 3^{2^k} \qquad \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k-\frac{1}{2}} \qquad \sum_{k=1}^{n} k3^{-k}.$$

Pour la première somme, on cherchera des constantes A, B, C telles que :

$$\frac{2X+1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{C}{X+2}$$

(Décomposition en éléments simples).

Pour la dernière somme, on s'intéressera à la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ que l'on dérivera de deux manières différentes. On évaluera ensuite en une valeur judicieuse de x.

Exercice 3.8. Calculez les sommes suivantes:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \quad et \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$$

Indication: On s'interessera à $(1+x)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ et on cherchera des transformations permettant de se ramener de cette quantité à chacune de ces deux sommes.

Exercice 3.9. Soit $n \geq 2$ un entier. Calculez :

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$$

et sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3.10. Soit $n \geq 1$ un entier naturel et x un réel. Simplifier :

$$(1-x)\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) \text{ et } \sin(1)\prod_{k=0}^{n-1}\cos(2^k)$$

Exercice 3.11. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels. En s'intéressant à la fonction polynomiale P définie pour tout réel t par:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + tb_k)^2$$

Montrez que:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)}\sqrt{(\sum_{k=1}^{n} b_k^2)}$$

Caractérisez le cas où cette inégalité est une égalité.

Exercice 3.12. Calculez les sommes suivantes:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \sum_{k=1}^{n} kk! \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

Exercice 3.13. Soit k, r et n deux entiers naturels tels que $r+1 \leq k$.

1) Montrez que:

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r} + \binom{k}{r+1}$$

2) En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}$$

Exercice 3.14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculez :

$$\sum_{i=1}^{n}((-\frac{2}{3})^i \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} 3^k)$$

Exercice 3.15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculez:

$$\sum_{1 \leq p < q \leq n} pq.$$

Exercice 3.16. (d'après Concours Général 2023) Soit $n \geq 1$ un entier. On pose:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrez que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1)$

Exercice 3.17. ($\star\star\star$) Calculez, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \min(i,j).$$

Exercice 3.18. ($\star\star\star$) Montrez que :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2}) = \sqrt{e}$$

On pourra prouver que $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$ dès que $x > 0$.

Exercice 3.19. ($\star\star\star\star\star$) Soit E un ensemble fini. Si X est un ensemble fini, on notera $|X|$ le nombre d'éléments de A. Calculez :

$$\sum_{X \subset E} |X| \text{ et } \sum_{X,Y \subset E} |X \cap Y|$$

Exercice 3.20. ($\star\star\star\star\star$) Déterminer $C > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$|\cos(x+1)| + |\cos(x)| \geq C$$

En déduire une constante $D > 0$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos(k)|}{k} \geq D \ln(n)$$

En déduire la limite lorsque n tend vers l'infini de cette somme.

Exercice 3.21. On définit le sinus hyperbolique, noté sh de la manière suivante:

$$\mathrm{sh} : x \in \mathbb{R} \to \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Montrez que :

$$\forall x \in]0,1[, 1 + x < e^{\mathrm{sh}(x)} < \frac{1}{1-x}.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire la limite lorsque n tend vers l'infini de :

$$\sum_{l=n}^{kn} \mathrm{sh}(\frac{1}{l}).$$

Exercice 3.22. L'objectif de cet exercice est de montrer, pour $n \geq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Soit x un réel non nul. Démontrez que:

$$\frac{1-(1-x)^n}{x} = \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

2. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} x^k$$

Montrez que:

$$f'(x) = -\sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p.$$

3. Conclure.

Exercice 3.23. En écrivant que:

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} 2^k$$

Retrouvez la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

4. Méthodes de raisonnement.

On s'intéresse ici aux différentes méthodes de raisonnement qui vous permettront de mener à bien la résolution de certains problèmes.

4.1. Raisonnement par équivalence et par double implication

Entrevu dans la partie 1, le raisonnement par équivalence est crucial. Il consiste à – étant donné une propriété A – trouver une propriété B équivalente à A qui est plus simple à exploiter.

4.1.1. Raisonnement par équivalence:

Tout d'abord, un peu de vocabulaire. On dit que la proposition A est une condition suffisante pour B si et seulement si :

$$A \implies B. \text{ (lire } A \text{ implique } B)$$

En effet, il suffit que A soit réalisée pour que B le soit aussi. Réciproquement, on dit que B est une condition nécessaire pour A. Effectivement, A entraîne B donc si B n'est pas réalisée, il est évident que A n'est pas réalisée non plus. Si $A \implies B$ et $B \implies A$, on dira que A et B sont équivalentes et l'on notera $A \iff B$. Expliquons maintenant, sur un exemple, comment faire une preuve par équivalence:

Exemple: On cherche à savoir si $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} < 3$. Pour cela on va déterminer une propriété équivalente à celle-ci plus simple à traiter. En effet :

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}<3\\
\iff\ &\sqrt[3]{2}<3-\sqrt{3}\\
\iff\ &2<(3-\sqrt{3})^3=54-30\sqrt{3} \text{ par stricte croissance de } x\mapsto x^3 \text{ sur } \mathbb{R}.\\
\iff\ &30\sqrt{3}<52\\
\iff\ &2700<52^2=2704 \text{ par stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Cette dernière inégalité étant vraie et équivalente à la première, on en déduit que $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}<3$. Le but du raisonnement par équivalence est donc de partir d'une propriété A (sans savoir si celle-ci est vraie) et de montrer qu'elle équivaut à une autre propriété plus simple B. On peut alors savoir si B est vraie ou non. B étant équivalente à A, on peut en déduire si A est vraie ou non.

4.1.2. Raisonnement par double implication:

Il se peut aussi qu'on vous demande directement de montrer une équivalence entre deux énoncés. Le raisonnement par équivalence peut parfois marcher. On préférera toutefois assez souvent le raisonnement par double implication. Celui-ci se fait de la manière suivante :

On cherche à montrer $A \iff B$ où A et B sont deux énoncés. Dans un premier temps, on peut supposer A vrai et en déduire que B est vrai. Cela montre que $A \implies B$. Dans un second temps, on suppose B vrai et on en déduit que A est vrai. Cela permet de conclure : $A \iff B$.

4.1.3. Exercices:

Voici quelques exercices pour vous familiariser avec ce concept :

Exercice 4.1. Montrez que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=0 \iff x=y=0$$

Exercice 4.2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n est impair, alors n^2 l'est aussi. Que dire du cas où n est pair ?

Exercice 4.3. ($\star\star\star\star$) Soit, pour $z\in\mathbb{C}$, $A(z)$ la proposition :

$$\exists(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\mathbb{U}^3 \ \mid\ z=\omega_1+\omega_2+\omega_3.$$

et $B(z)$ la proposition :

$$\exists\theta\in\mathbb{R} \ \mid\ |z-e^{i\theta}|\leq 2.$$

et enfin $C(z)$ la proposition:

$$|z| \leq 3.$$

Dans cet exercice, nous aurons besoin d'admettre **l'inégalité triangulaire** (prouvée plus loin dans le document). Cette inégalité est la suivante:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1. Prouvez que :

$$A(z) \implies B(z),\ B(z) \implies C(z) \text{ et } A(z) \implies C(z).$$

2. Prouvez que $C(z) \implies B(z)$. On pourra considérer $\theta = Arg(z)$.

3. Soit $R \in [0, 2]$. Montrez que :

$$\exists t \in \mathbb{R} \mid R = 2\cos(t).$$

4. Prouvez que $B(z) \implies A(z)$. On pourra considérer $R = |z - e^{i\theta}|$ pour un certain réel θ.

5. Conclure.

6. Soit $n \geq 3$. Montrez que:

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq n \iff \exists(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{U}^n \mid z = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

4.2. Raisonnement par analyse-synthèse

4.2.1. Vocabulaire :

Le raisonnement par analyse-synthèse est un type de raisonnement important permettant de prouver l'existence et l'unicité d'un ensemble de solutions à un problème. Il se décompose, comme son nom l'indique, en deux étapes:

- **L'analyse :** On suppose l'existence d'une solution $\mathbb{S}$ à un problème. Ce problème impose des conditions, des hypothèses sur $\mathbb{S}$. Ces contraintes nous permettent d'en déduire la forme de $\mathbb{S}$. Ceci assure l'unicité de la solution.

- **La synthèse :** Ayant désormais une condition nécessaire sur $\mathbb{S}$ (la forme que l'on a trouvé dans l'analyse), on vérifie que $\mathbb{S}$ est effectivement solution du problème. En effet, on avait supposé l'existence de $\mathbb{S}$ dans la partie précédente, rien ne nous dit que nous avons pas simplement disserté sur un objet qui n'existait pas. Il est donc nécessaire de s'assurer de son existence en vérifiant que la forme nécessaire de $\mathbb{S}$ est bien solution.

Voici un exemple d'application de ce raisonnement:

Exemple: On souhaite prouver que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On raisonne ici par analyse synthèse:

Analyse:
Soit f une telle fonction. Supposons que l'on dispose alors de deux fonctions i et p respectivement impaire et paire telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = i(x) + p(x)$$

Mais alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = i(-x) + p(-x) = -i(x) + p(x) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = i(x) + p(x).$$

En sommant ces deux égalités, il vient:

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

On en déduit de même :

$$\forall x \in \mathbb{R}, i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a supposé que i et p existaient et on a trouvé leur forme. Cela n'assure pas que i et p répondent effectivement au problème. D'où :

Synthèse:
On vérifie, réciproquement, que :

$$i + p = f \text{ et } i \text{ est impaire, } p \text{ est paire.}$$

D'où le résultat par analyse-synthèse. Signalons que ce mode de raisonnement est un peu lourd. Avec l'expérience, vous ne signalerez plus que vous effectuez un raisonnement par analyse-synthèse mais vous effectuerez tout de même l'analyse suivie d'une synthèse.

4.2.2 Exercices:

Voici quelques exercices pour mettre en application ce mode de raisonnement :

Exercice 4.4. On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

1) Calculez $f(0)$ et $f(1)$.

2) En remplaçant x par $1 - x$ trouver f et conclure.

Exercice 4.5. Résoudre de même l'équation fonctionnelle:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 4.6. Trouvez tous les fonctions f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que:

- $\forall a, b \in \mathbb{C}, f(ab) = f(a)f(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{C}, f(a+b) = f(a) + f(b)$
- $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = a$.

Exercice 4.7. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y'(x) = \frac{1}{2}y(\frac{1}{x}).$$

1) Soit y une solution. On pose pour tout réel t, $z(t) = y(e^t)$. Montrez que :

$$z'' - z' + \frac{z}{4} = 0.$$

2) On pose désormais pour tout réel t, $w(t) = z(t)e^{-t/2}$. Montrez que $w'' = 0$.

3) En déduire l'existence de $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout réel t:

$$z(t) = (At + B)e^{t/2}.$$

4) Conclure. (on voit ici l'intérêt de la synthèse).

Exercice 4.8. (ELMO 2020) ($\star\star\star\star\star$) Si f est une fonction et n un entier, on note ici f^n la composée n-ème de f. Autrement dit : $f^n = f \circ \cdots \circ f$ n fois. Déterminez alors toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*, f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1$$

4.3. Raisonnement par récurrence

Nous verrons ici les différents types de raisonnement par récurrence.

4.3.1. Raisonnement par récurrence simple:

Lorsqu'on cherche à montrer une propriété dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$, que l'on note $\mathbf{P}(n)$, on peut penser à ce mode de raisonnement. Le principe de récurrence simple s'énonce ainsi:

Soit $\mathbf{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n

- Si $\mathbf{P}(0)$ est vraie (Initialisation)
- et si, pour tout entier naturel n, $(\mathbf{P}(n) \Rightarrow \mathbf{P}(n+1))$ (Hérédité)

alors $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Dans votre rédaction, il est bien de clairement distinguer l'initialisation, l'hérédité et la conclusion pour que le correcteur puisse bien comprendre votre cheminement.

4.3.2. Théorème de la division euclidienne:

Nous présenterons ici simplement la preuve du théorème de la division euclidienne sur $\mathbb{N}$ par récurrence simple. On payera particulièrement attention à la rédaction de la récurrence mais aussi à la manière dont on peut prouver l'existence puis l'unicité d'une décomposition.

Théorème : Soit $n \geq 0$ un entier et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, b-1\}$ tel que :

$$n = bq + r.$$

Preuve :

On commence par l'initialisation que l'on prouve par récurrence. Fixons $b \in \mathbb{N}^*$

Pour tout entier naturel n, on note H_n la propriété :

"Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, b-1\}$ tel que $n = bq + r$"

Initialisation: On a $0 = b \times 0 + 0$ ce qui prouve H_0.

Hérédité: Soit $n \geq 0$ un entier. Supposons H_n. Montrons H_{n+1}.

On dispose donc d'un couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, b-1\}$ tel que $n = bq + r$. Dès lors, $n + 1 = bq + r + 1$.

- Si $r < b - 1$ alors $r + 1 \leq b - 1$. Alors le couple $(q, r + 1)$ convient.
- Sinon, $r = b - 1$ d'où $n + 1 = b(q + 1) + 0$ et le couple $(q + 1, 0)$ convient.

Ceci prouve donc, dans tous les cas, H_{n+1}.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, on dispose donc de tels couples (q, r).

Ayant montré l'existence, on passe à présent à l'unicité. Pour ce faire, on suppose que l'on dispose de deux divisions euclidiennes d'un entier naturel n. Autrement dit, on dispose de $(q, r), (q', r') \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, b-1\}$ tels que :

$$n = bq + r = bq' + r'.$$

Mais alors $b(q-q') = r'-r$. Or $|r'-r| \leq b-1$ donc $0 \leq b|q-q'| < b$ or $b|q-q'|$ est un multiple de b. Ceci entraîne nécessairement $b|q-q'| = 0$ or $b \neq 0$ donc $q = q'$. Puis $r'-r = b(q-q') = 0$ donc $r = r'$ prouvant ainsi que ces deux décompositions sont les mêmes. On a donc montré l'unicité de cette décomposition. $\square$

4.3.3. Exercices:

Exercice 4.9. (Théorème de Nicomaque). Montrez par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$$

Exercice 4.10. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \geq 1$ un entier naturel. Montrez que :

$$e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 4.11. Démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on peut trouver n entiers strictements positifs $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 1$$

Exercice 4.12. (Question posée au Concours Général 2021) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par :

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$$

pour tout entier naturel $n \geq 1$. Montrez que :

$$\forall n \geq 0, u_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Exercice 4.13. Montrez que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un entier impair λ_n tel que:

$$5^{2^{n-2}} = 1 + \lambda_n 2^n$$

Exercice 4.14. Montrez que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|.$$

Exercice 4.15. Soit $n \geq 0$ un entier. Prouver que :

$$\binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{3n+1}}$$

Exercice 4.16. ($\star\star\star\star\star$) (Concours Général 1999) Résoudre l'équation en $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n$$

4.3.4. Récurrence double:

Venons-en aux types de récurrence plus exotiques:

En effet, dans certains cas, la récurrence simple ne suffit pas car plus d'information est nécessaire. A ce titre, on peut raisonner par récurrence **double** ou **forte**.

Le principe de récurrence double s'énoncé ainsi :

- Soit $\mathbf{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n
- Si $\mathbf{P}(0)$ et $\mathbf{P}(1)$ sont vraies
- et si, pour tout entier naturel n, $(\mathbf{P}(n)$ et $\mathbf{P}(n+1)) \Rightarrow \mathbf{P}(n+2)$

Alors $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. On privilégiera ce mode de raisonnement lorsque notre problème fait intervenir des termes d'ordre n, $n+1$ et $n+2$. Voici un exemple:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Nous allons montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + 2^n$. Les ordres $n+2$, $n+1$ et n apparaissent, nous invitant ainsi à effectuer un raisonnement par récurrence double.

On définit alors pour tout entier naturel n, P_n la propriété : "$u_n = 1 + 2^n$".

Initialisation: Vérifions que P_0 et P_1 sont vraies :
En effet : $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et $u_1 = 3 = 1 + 2^1$.

D'où P_0 et P_1.

Hérédité: Soit n un entier naturel. Supposons P_n et P_{n+1} vraies. Dès lors:

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\
&= 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 - 2 \times 2^n \\
&= 1 + 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} \\
&= 1 + 2^{n+2}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve P_{n+2}.

Conclusion: D'après le principe de récurrence double, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + 2^n$.

Mais comment faire pour deviner cette expression de u_n sans qu'on ne nous la donne ? Tout simplement en calculant des premiers termes ! Il est très facile de se rendre compte que :

$$u_0 = 2 = 1 + 2^0$$
$$u_1 = 3 = 1 + 2^1$$
$$u_2 = 5 = 1 + 2^2$$
$$u_3 = 9 = 1 + 2^3$$

Ce qui nous aurait immédiatement lancé dans la preuve par récurrence. Autorisez-vous assez de liberté pour faire ce genre de recherche et ne vous obligez pas à appliquer des méthodes déjà connues. Experimentez, cherchez et conjecturez avant de prouver. Voici quelques exercices pour vous entraîner :

4.3.5. Exercices:

Exercice 4.17. (Une des questions du Concours Général de 2019) La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrez que pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$\sqrt{2}F_n < F_{n+1} < 2F_n$$

Exercice 4.18. Après avoir montré que l'équation :

$$x^2 = x + 1$$

admet deux solutions $\phi > 0 > \overline{\phi}$, montrez, sans utiliser les valeurs de ϕ et $\overline{\phi}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \overline{\phi}^n)$$

où (F_n) est la suite de Fibonacci de l'exercice précédent.

Exercice 4.19. Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2}a_n$$

Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq a_n \leq n^2.$$

Exercice 4.20. ($\star\star\star\star$) (Très ancien oral de l'École polytechnique) Déterminer le nombre a_n de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2.
Montrer que si n est assez grand, a_n est la partie entière de $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1}$.

Venons-en enfin à la récurrence forte qui fait intervenir tous les termes précédents. En voici un énoncé général :

4.3.6. Récurrence forte:

Soit $\mathbf{P}(n)$ un énoncé dépendant d'un entier naturel n.

- Si $\mathbf{P}(0)$ est vraie
- et si, pour tout entier naturel n, $(\mathbf{P}(0), \ldots, \mathbf{P}(n)) \Rightarrow \mathbf{P}(n+1)$

Alors $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

On notera donc, que contrairement à la récurrence double, l'initialisation est ici la même que celle de la récurrence simple. On pourrait donc toujours se placer dans le cadre d'une récurrence forte lorsque l'on se lance dans une récurrence simple. Voici un exemple:

Nous allons montrer par récurrence forte que tout nombre entier $n \geq 2$ est soit premier soit produit de nombres premiers. On note P_n cette propriété.

Initialisation: 2 étant premier, P_2 est vraie.

Hérédité: Soit $n \geq 2$. Supposons que: $\forall k \in [\![2, n]\!]$, P_k soit vraie. Montrons P_{n+1}.

On raisonne par disjonction de cas:

- Si $n+1$ est un nombre premier, alors P_{n+1} est vraie.
- Si $n+1$ n'est pas un nombre premier, alors $n+1$ admet un diviseur premier p et il existe donc $d \in [\![2, n]\!]$ tel que $n+1 = dp$. Par P_d, d est premier ou est un produit de nombres premiers. $n+1$ est donc un produit de nombres premiers.

Ceci prouve P_{n+1}.

Conclusion: Par le principe de récurrence forte, tout nombre entier $n \geq 2$ est soit premier soit produit de nombres premiers.

Voici dès maintenant des exercices :

Exercice 4.21. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Trouvez une expression explicite de u_n.

Exercice 4.22. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Trouvez une expression explicite de u_n.

Exercice 4.23. ($\star\star\star$) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer $\cos((n+1))$ en fonction de $\cos(n)$,$\cos(1)$ et $\cos(n-1)$. En déduire que $\cos(1)$ est irrationnel.

Exercice 4.24. ($\star\star\star\star\star$) (Une suite d'Erdös) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n+1$.

2) Trouvez une constante $C > 0$ telle que pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq C(n+1).$$

Exercice 4.25. ($\star\star\star\star\star$) D'après IMO P6. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* f(n+1) > f(f(n)).$$

Trouvez f.

4.4. Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde repose sur la négation d'une implication. Si l'on cherche à montrer que $A \Rightarrow B$, alors on peut montrer que $\neg(A \Rightarrow B)$ est fausse i.e que la négation de $A \rightarrow B$ est fausse. On suppose donc un instant le contraire de ce que l'on veut montrer et l'on espère obtenir une contradiction qui nous permettrait d'affirmer que cette supposition est fausse. Autrement dit, on supposera un instant que A et $\neg B$ sont vraies. Voici un exemple:

Exemple: On cherche à montrer que si a, b, c, d sont des entiers tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ alors $a = c$ et $b = d$. On procède par l'absurde.

Supposons un instant que $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$ mais que $a \neq c$ ou $b \neq d$. Traitons le cas où $a \neq c$, l'autre cas se traitant de manière analogue. Il vient alors:

$$\sqrt{2}(d-b) = a - c$$

Mais alors, $a - c$ étant non nul :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{d-b}{a-c}$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ ce qui assure que $d - b \neq 0$. Dès lors :

$$\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$$

Ce qui contredit le caractère irrationnel de $\sqrt{2}$! Absurde. Dès lors, $a = c$ et $d = b$.

4.4.1. Exercices:

Exercice 4.26. Montrez que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 4.27. Montrez que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 4.28. Montrez que $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.

Exercice 4.29. Démontrez que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admet aucune solution entière.

Exercice 4.30. Montrez que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

4.5. Raisonnement par contraposée

Ce raisonnement repose sur la contraposée d'une implication. En effet, si A et B sont deux proprositions, alors $A \Rightarrow B$ est équivalente à sa contraposée $\neg B \Rightarrow \neg A$. Raisonner par contraposée signifie démontrer cette deuxième implication $\neg B \Rightarrow \neg A$ pour démontrer que $A \Rightarrow B$. Voici un exemple:

Exemple: Soit n un entier naturel. Montrons que si n^2 est pair alors n est pair.

Nous raisonnons par contraposée. Supposons que n n'est pas pair, à savoir que n est impair. Nous pouvons dès lors écrire $n = 2k + 1$ où k est un entier naturel. Mais alors :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(k^2 + k) + 1$$

et ce nombre est impair, donc n^2 est impair. Nous avons donc montré par contraposée que si n^2 est pair, alors n est pair. Voici à présent un exercice d'application:

4.5.1. Exercices:

Exercice 4.31. Montrez par contraposée la propriété suivante :

Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

4.6. Un peu de théorie des ensembles

Vous pouvez parfois être amenés à travailler avec des ensembles (cf CGL 2021). Il est important de connaître les bases de la théorie des ensembles que l'on va développer succinctement ici.

4.6.1. Vocabulaire:

Un ensemble est une collection d'objets distincts, ces derniers étant rangés sans notion d'ordre.

Un ensemble peut se présenter de différentes manières. L'écriture en extension consiste à énumérer chacun des éléments de l'ensemble que l'on décrit. Cela peut être pratique pour les ensembles finis. Voici un exemple :

$$A = \{1, 8, 3, 9\}$$

On peut aussi parler de l'ensemble des éléments d'un ensemble plus grand qui vérifient certaines propriétés. On parle d'écriture en compréhension, souvent très pratique. Voici un exemple pour décrire l'ensemble des nombres pairs :

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2k\}$$

Il faut ici lire: l'ensemble des entiers naturels n tels qu'il exist un entier naturel k tel que $n = 2k$. En effet, la barre verticale remplace la locution "tel que".

Certains ensembles sont finis et disposent donc d'un cardinal. Celui-ci désigne le nombre d'éléments appartenant à notre ensemble. Si A est un ensemble fini, son cardinal peut être noté Card A ou encore $|A|$. D'autres sont infinis, on ne parle alors pas de leur cardinal (ou l'on peut convenir qu'il est infini). Voici quelques exemples

- $\{1, 2, 5\}$ est un ensemble fini de cardinal 3. Il s'agit du même ensemble que $\{2, 1, 5\}$
- $[0, 1[$ est un ensemble infini
- $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ est un ensemble fini de cardinal $n + 1$ (n étant un entier).

Enfin, si $A \subset B$, on dit que A est une partie de B. L'ensemble des parties de B est noté $\mathcal{P}(B)$.

4.6.2. Égalité de deux ensembles:

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on montre que A est inclus dans B et réciproquement que B est inclus dans A. Rappelons que A est inclus dans B ($A \subset B$) si et seulement si:

$$\forall x \in A, x \in B$$

Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on commence par se fixer un élément d'un des deux ensembles avant de montrer que ce dernier appartient à l'autre ensemble. On fait ensuite de même pour l'autre ensemble. Voici un exemple de rédaction :

Exemple: On dispose des deux ensembles suivants:

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$
- $B = \{(t + 1, 4t + 3), t \in \mathbb{R}\}$

et l'on souhaite montrer leur égalité.

On procède par double inclusion. Soit $(x, y) \in A$. On cherche à trouver un $t \in \mathbb{R}$ tel que $t + 1 = x$ et $4t + 3 = y$. Choisissons alors $t = x - 1$ pour que la première égalité soit d'emblée vérifiée. On remarque alors que, comme $(x, y) \in A$, $4x - y = 1$. Dès lors $y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3$. Ce qui montre l'existence d'un tel $t \in \mathbb{R}$. Ainsi $(x, y) \in B$ ce qui montre que $A \subset B$.

Réciproquement, soit $(x, y) \in B$. La définition de B fournit $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. Un simple calcul montre alors que $4x - y = 1$ d'où $(x, y) \in A$. Finalement $B \subset A$.

Par double inclusion, $A = B$.

4.6.3. Minorant, Majorant, Maximum, Minimum:

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in A, x \leq M$$

Réciproquement, une partie A de $\mathbb{R}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que:

$$\forall x \in A, x \geq m$$

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite bornée si de tels M et m existent. Attention à ne pas confondre majorant avec maximum et minorant avec minimum. Dans le cas d'un maximum, M est élément de A et dans le cas d'un minimum, m est élément de A. Ce n'est pas forcément le cas pour un majorant ou un minorant. D'ailleurs, il n'existe pas toujours de minimum ou de maximum.

4.6.4. Réunion et intersection

Enfin, si A et B sont deux ensembles, on note $A \cup B$ l'ensemble formé des éléments qui sont dans A ou dans B ou dans A et B. On notera de même $A \cap B$ l'ensemble des éléments qui sont dans A et B. On notera la formule suivante:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

4.6.5. Stabilité d'un ensemble par une opération:

Un ensemble A est dit stable par une opération $\star$ (penser à l'addition ou la multiplication) si et seulement si, en appliquant l'opération $\star$ à deux éléments de A, on obtienne un élément de A. Autrement dit, A est stable par $\star$ si et seulement si :

$$\forall x, y \in A, x \star y \in A.$$

Exemple:

- $\mathbb{R}$ est stable par $+, \times, -$;
- $\mathbb{N}$ est stable par $+$ mais pas par $-$ car $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$;
- $\mathbb{Z}$ est stable par $+$, $-$ et $\times$.

Voici quelques exercices pour vous familiariser avec ces notions :

4.6.6. Complément: Images directes et réciproques d'ensembles

Soit $f : A \to B$ une fonction entre deux ensembles A, B. Soit $C \subset A$ et $D \subset B$. On note:

$$f(C) = \{f(x), x \in C\}.$$

Qu'on appelle l'image de C par f. Il s'agit en fait de l'ensemble des images prises par f lorsque les antécédents décrivent C. On note aussi:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

Qu'on appelle l'image réciproque de D par f. Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des éléments $x \in A$ tels que $f(x)$ soit élément de D.

Exemple: Déterminons $\exp(\mathbb{R})$. En regardant le graphique de la fonction exponentielle, on aimerait prouver que:

$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}.$$

On raisonne par double inclusion. Soit donc $y \in \exp(\mathbb{R})$. Par définition de cet ensemble, on dispose de $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \exp(x)$.

Or, par stricte positivité de la fonction exponentielle, $\exp(x) > 0$ autrement dit $y > 0$ donc $y \in \mathbb{R}^{+*}$. Ceci montre donc que $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On remarque alors que $x = \exp(\ln(x)) \in \exp(\mathbb{R})$ car $\ln(x) \in \mathbb{R}$. Ceci montre donc que $\mathbb{R}^{+*} \subset \exp(\mathbb{R})$.

Par double inclusion: $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$.

Exemple: Soit f la fonction qui à un réel x associe son carré. Nous allons montrer que $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$.

Soit $x \in [-2,2]$. Alors $f(x) = x^2 \in [0,4] \subset [-1,4]$. Dès lors, $x \in f^{-1}([-1,4])$ d'où $[-2,2] \subset f^{-1}([-1,4])$.

Réciproquement, soit $x \in f^{-1}([-1,4])$. Autrement dit, $f(x) \in [-1,4]$ i.e $-1 \leq x^2 \leq 4$. Si $x > 2$ alors $x^2 > 4$ ce qui est absurde. De même, si $x < -2$ alors $x^2 > 4$ ce qui n'est pas possible. Dès lors $-2 \leq x \leq 2$, autrement dit $x \in [-2,2]$ ce qui prouve l'inclusion réciproque.

Finalement:

$$f^{-1}([-1,4]) = [-2,2].$$

4.6.7. Exercices:

Exercice 4.32. Soit E un ensemble et A et B des parties de E. Montrez que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.

Exercice 4.33. Ecrire l'ensemble des parties de $E = \{a,b,c,d\}$.

Exercice 4.34. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 4.35. Donnez des exemples d'ensembles :

- 1) Sans majorant
- 2) Sans minorant
- 3) Sans maximum mais avec majorant
- 4) Sans minimum mais avec minorant
- 5) Borné mais sans minimum et sans maximum
- 6) Borné par un maximum et un minimum

Vous prouverez chacune de vos affirmations.

Exercice 4.36. Donnez deux définitions ensemblistes du cercle unité.

Exercice 4.37. Soit $0 < a < 1$ un réel. Pour $w \in \mathbb{C}$ différent de $\frac{1}{a}$, on pose:

$$T(w) = \frac{w-a}{aw-1}$$

Montrez que :

$$\mathbb{U} = \{T(w), w \in \mathbb{U}\}$$

où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1.

Exercice 4.38. ($\star\star\star\star\star$) Soit E une partie de $\mathbb{C}$ non vide, stable par $\times$ et telle que :

$$\forall z \in E, \frac{1}{2} \leq Re(z) \leq 2$$

Trouvez E.

Exercice 4.39. ($\star\star\star$) (Adaptation du Concours Général de 1990) On va s'intéresser à l'ensemble E suivant :

$$E = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \text{ tel que } 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\}$$

On commence par l'équation :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{4}$$

1) Si de tels nombres existent, montrez que :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{3}{a^2} \text{ et } \frac{1}{a^2} < \frac{1}{4}$$

Puis prouvez que $a = 3$.

2) Démontrer ensuite que $b = 3$. Conclure.

3) Vérifiez que : $1 \in E$, $2 \notin E$, $3 \notin E$, et $4 \in E$.

4) En utilisant a, b, c, prouvez que $6 \in E$.

5) En utilisant a, b, c, prouvez que $8 \in E$.

6) Démontrez par l'absurde que $5 \notin E$.

7) Soit $n \in E$. Prouvez que $n + 3 \in E$.

8) Démontrez par récurrence que :

$$E = \mathbb{N}^* - \{2, 3, 5\}.$$

Exercice 4.40. Déterminez $\ln([2, \infty[)$.

Exercice 4.41. Soit f une fonction continue et I un intervalle. Montrez que $f(I)$ est un intervalle.

Montrez de plus que si f est strictement croissante et si $a < b$ sont des réels, alors:

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)] \text{ et } f(]a,b[) =]f(a), f(b)[.$$

Que se passe-t-il si f est strictement décroissante ?

Exercice 4.42. Soit $g : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x}{1+x}$.

Déterminez $g^{-1}([0,1[)$.

Exercice 4.43. Soit :

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}, (p,q) \mapsto p + \frac{1}{q}.$$

A-t-on $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) = \mathbb{Q}$?

Exercice 4.44. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Déterminez $f([2,3])$, $f(]0,3])$, $f^{-1}(]0,\infty[)$ et $f^{-1}([-6,6])$.

Exercice 4.45. Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Montrez que:

- $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f(f^{-1}(A))$.
- $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 4.46. ($\star\star\star\star$) Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une fonction croissante pour l'inclusion. Autrement dit:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B \implies f(A) \subset f(B)).$$

Montrez qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(A) = A$.

5. Trigonométrie et nombres complexes

Les nombres complexes et la trigonométrie sont intimement liés et sont extrêmement importants que ce soit en mathématiques ou en physique. On commence par les valeurs usuelles de sin et cos à connaître par coeur:

5.1. Les différentes formes d'un nombre complexe

On commence par présenter certains points clés des nombres complexes.

5.1.1. La conjugaison:

Soit z un nombre complexe. On note $\overline{z}$ le conjugué de z.

Si $z = a + ib$ où a, b sont des réels alors $\overline{z} = a - ib$. On note alors les formules suivantes:

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\forall z \in \mathbb{R}, \overline{z} = z$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Géométriquement, $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point d'affixe z.

5.1.2. L'argument:

L'argument d'un nombre complexe z est défini à 2π près. Il s'interprète comme l'angle formé par le vecteur (Re(z),Im(z)) et l'axe des abscisses.

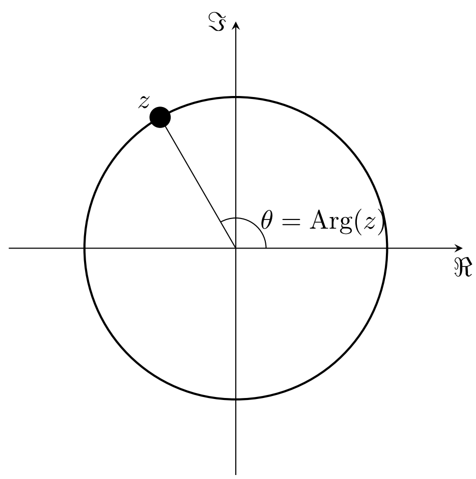


Figure 1: Représentation de l'argument d'un nombre complexe z

5.1.3. Le module:

Le module d'un complexe z, souvent noté R, est défini par $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Les points à noter sont les suivants:

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z||z'|$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z/z'| = |z|/|z'|$

Il s'agit, géométriquement, de la distance du point d'affixe z à l'origine.

5.1.4. Formes d'un nombre complexe:

On rappelle qu'un nombre complexe peut s'écrire de différentes mantières. En effet, soit $z \in \mathbb{C}$.

- **Forme algébrique:** z peut s'écrire $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. a est alors appelée partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ et b la partie imaginaire de z appelée $\mathrm{Im}(z)$
- **Forme trigonométrique:** z peut s'écrire $R(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $R = |z|$ est le module de z et θ est un argument de z
- **Forme exponentielle:** Cette forme est liée à la forme trigonométrique. z s'écrit, sous cette forme, $Re^{i\theta}$ où $R = |z|$ et θ est un argument de z. En particulier $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

5.2. Formulaire de trigonométrie

θ (rad)	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$
0	0	1
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\pi/2$	1	0
π	0	-1

Table 1: Valeurs usuelles de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$

Il est aussi important de connaître les formules de trigonométrie et de savoir les redémontrer. On voit ici sur un exemple comment les démontrer avec les nombres complexes. Les formules à connaître sont résumées dans l'exercice 1.

Exemple: Il sera souvent utile de passer par les nombres complexes pour prouver une formule de trigonométrie. Montrons, par exemple que :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Pour ce faire, fixons a et b des réels. Remarquons alors que:

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b))$$

En développant le produit du membre de droite et en prenant la partie réelle, le résultat découle immédiatement.

5.3. Formule d'Euler et arc moitié:

Observons le fait suivant: si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ alors:

$$\begin{aligned}\frac{z+\overline{z}}{2} &= \frac{a+ib+a-ib}{2}\\ &= a\\ &= \mathrm{Re}(z)\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}\frac{z-\overline{z}}{2i} &= \frac{a+ib-a+ib}{2i}\\ &= b\\ &= \mathrm{Im}(z)\end{aligned}$$

Supposons alors que $|z| = 1$. On dispose de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. En appliquant les formules que l'on vient de trouver, on obtient les fomules d'Euler suivantes, valables pour tout réel θ:

- $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta)$
- $\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \sin(\theta)$

Cela va nous permettre de trouver une nouvelle forme au nombre complexe :

$$\begin{aligned}1 - e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})\\ &= -2i\sin(\theta/2)e^{-i\frac{\theta}{2}} \text{ par une formule d'Euler}\end{aligned}$$

On appelle cette factorisation par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ la technique de l'arc moitié. En voici une application:

Application: On cherche à calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que x n'est pas congru à π modulo 2π et $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx).$$

Pour ce faire, on remarque, en posant $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ que:

$$C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

Par hypothèse sur x, $e^{ix} \neq -1$ d'où:

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Ceci montre que $C_n(x) = \mathrm{Re}(\dfrac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}})$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} &= \frac{e^{i(n+1)x/2}(e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})} \\
&= \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)e^{i(n+1)x/2}}{-2i\sin(x/2)e^{ix/2}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}e^{i\frac{nx}{2}}
\end{aligned}$$

D'où $C_n(x) = \mathrm{Re}(\dfrac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}) = \dfrac{\sin(\frac{x(n+1)}{2})\cos(\frac{nx}{2})}{\sin(x/2)}$.

5.4. Exercices:

Exercice 5.1. Montrez, à l'aide de la forme exponentielle de nombres complexes :

- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$
- $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

En déduire $\cos^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$, $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$ puis exprimez $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

Exercice 5.2. Trouver le module et l'argument de $1 + e^{i\theta}$ si $\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$

Indication: On factorisera par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ (technique de l'arc moitié).

Exercice 5.3.

a) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrez que l'équation en z : $z^n = 1$ admet exactement n solutions que l'on exprimera.

On notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces solutions. Il s'agit de l'ensemble des racines de l'unité.

b) Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$. Illustrer ce résultat sur un dessin pour des petites valeurs de n.

Exercice 5.4.

a) Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrez que : $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Indication: On comparera la différence des carrés de chaque membre.

b) Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.

c) Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrez que :

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

d) ($\star\star$) Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.

Exercice 5.5. Étant donné un entier n et un réel x, calculez la sommes suivante:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$$

Exercice 5.6. Étant donné un réel x et un entier n, donnez une expression simple de:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^3(kx)$$

Exercice 5.7. Soit, pour tout réel t, $Z(t) = \dfrac{ie^t}{1 + i(e^t - e^{-t})}$.
Soit $f : t \mapsto \ln |Z(t)|$. Montrez que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq \mathbf{min}(2t, 0).$$

Exercice 5.8. Démontrez que :

$$\mathbb{U}_{60} = \{xy, x \in \mathbb{U}_{12}, y \in \mathbb{U}_{15}\}$$

Exercice 5.9. Montrez que, si $n \in \mathbb{N}^*$, si $x_1, \ldots, x_n$,$y_1, \ldots, y_n$ sont des nombres complexes de module au plus 1 alors:

$$|\prod_{i=1}^{n} y_i - \prod_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|.$$

Exercice 5.10 Montrez l'existence d'un nombre complexe z vérifiant :

$$e^z = z.$$

On rappelle que si $z = a + ib$ est un nombre complexe tels que a et b sont des réels, alors : $e^z = e^a e^{ib}$.

6. Fonctions d'une variable réelle, dérivation et limites

6.1. Définitions et généralités

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

6.1.1. Continuité

f est dite continue en un point $a \in I$ si et seulement si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

f sera alors dite continue sur I si f est continue en tout point $a \in I$.

Remarque: Si f est continue en un point $a \in I$, alors pour toute suite (x_n) tendant vers a:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

Attention, si vous trouvez une suite (x_n) telle que:

- $x_n \to a$
- $f(x_n) \to f(a)$

Cela n'entraîne pas la continuité de f en a ! En effet, l'existence d'une telle suite n'entraîne pas $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

6.1.2. Dérivabilité

f est dite dérivable en un point $a \in I$ si et seulement si:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ admet une limite lorsque } h \text{ tend vers } 0.$$

Cette limite est alors notée $f'(a)$.

On peut aussi voir cette limite comme:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

où l'on a posé $x = a + h$ et donc $h = x - a$ tend vers 0. La définition s'adapte donc:

f est dérivable en un point a si et seulement si:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ admet une limite lorsque } x \to a.$$

Cette limite est noté $f'(a)$.

Propriété: Toute fonction dérivable est continue. (la réciproque étant **FAUSSE !**).

Démonstration: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$ et $x \in I$. Posons:

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On a alors $f(x) - f(a) = \Delta(x)(x - a)$.
Comme f est dérivable, $\Delta(x)$ admet une limite l lorsque $x \to a$ (en fait $l = f'(a)$). Mais alors:

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = l \times 0 = 0 \text{ autrement dit } \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

a étant choisi arbitrairement dans I, f est continue sur I.

6.2. Nombre dérivé

On rappelle la définition du nombre dérivé qui permettra de résoudre certaines limites indéterminées :

Si f est une fonction dérivable en un point a de $\mathbb{R}$, alors:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Il s'agit en fait de la définition de la dérivée vue en classe de première. On va s'aider de celle-ci pour lever des indéterminées:

Exemple: On cherche à déterminer, si elle existe:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Comme $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$ par continuité de la fonction sin et car $\sin(0) = 0$, cette limite est indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Faisons intervenir un taux d'accroissement :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - 0}{x - 0} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

On s'est ramené au taux d'accroissement vu précédemment avec $f = \sin$ et $a = 0$. Cela permet de conclure :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{x} &= \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \\
&\xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) \\
&= \cos(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

d'où:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

6.3. Les croissances comparées

Enfin, une nouveauté sur les limites en Terminale sont les croissances comparées. Si n est un entier naturel non nul:

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$

Ces résultats sont à retenir et peuvent être utilisés sans démonstration pour le concours général.

Exemple: Calculons la limite lorsque n tend vers l'infini de :

$$f(x) = \frac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)^{x^2}}$$

Lorsque des grandeurs sont en puissance dans les calculs de limites (mais aussi dans les études de fonctions), il est bien de se ramener à une exponentielle de la manière suivante. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{\ln(x^{\ln(x)})}}{e^{\ln(\ln(x)^{x^2})}} \\
&= \frac{e^{\ln(x)\ln(x)}}{e^{x^2 \ln(\ln(x))}} \\
&= \exp(\ln(x)^2 - x^2 \ln(\ln(x)))
\end{aligned}$$

Il faut maintenant se demander: quel est, dans l'exponentielle, le terme le plus grand ? Gardez, dans un coin de votre tête, les comparaisons suivantes (elles ne sont pas rigoureuses et n'ont pas leur place sur une copie mais elle vous permettent de savoir comment procéder):

$$C \ll \ln(\ln(x))^\gamma \ll \ln(x)^\beta \ll x^\alpha \ll e^x \text{ où } C \in \mathbb{R} \text{ et } \gamma, \beta, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$$

Où $\ll$ signifie "très petit devant". Ainsi, $\ln(x)^2 \ll x^2 \ll x^2 \ln(\ln(x))$. Le terme qui domine dans l'exponentielle est donc $x^2 \ln(\ln(x))$. Il faut toujours penser, lors d'un calcul de limites, à factoriser par le terme prépondérant. C'est ce qu'on fait ici:

$$f(x) = \exp(x^2 \ln(\ln(x))(-1 + \frac{\ln(x)^2}{x^2 \ln(\ln(x))}))$$

Or: $\frac{\ln(x)^2}{x^2} = (\frac{\ln(x)}{x})^2 \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ par croissances comparées.
De plus $\frac{1}{\ln(\ln(x))} \to 0$ de même. On en déduit que $\frac{\ln(x)^2}{x^2 \ln(\ln(x))} \to 0$. Ainsi:

$$x^2 \ln(\ln(x))(-1 + \frac{\ln(x)^2}{x^2 \ln(\ln(x))}) \to -\infty$$

d'où:

$$f(x) \to 0.$$

6.4. Convexité:

La convexité est une notion très puissante en analyse qui permet, notamment, de démontrer des inégalités. Rappellons la définition au programme de terminale:

Définition: Une fonction f est dite convexe sur un intervalle I si et seulement si f est deux fois dérivable sur I et est telle que :

$$\forall x \in I, f''(x) \geq 0.$$

A l'inverse, elle sera dite concave si et seulement si :

$$\forall x \in I, f''(x) \leq 0.$$

On notera que, si f n'est pas deux fois dérivable mais admet une dérivée croissante, alors elle est tout de même convexe. De même, si f' est décroissante alors f est concave. (On notera aussi que cette définition est fausse, mais qu'importe aux yeux du programme de Terminale...)

Exemple:

- $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$
- $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $]0, \infty[$.

Définition: Un point $x \in I$ est un point d'inflexion de f si et seulement si $f''(x) = 0$ et que f'' change de signe en x.

Exemple: On s'intéresse à la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Étudions la convexité de f.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x^2 - 18x$$

Puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2x - 18.$$

Dès lors:

$$f''(x) \geq 0 \iff x \geq 9.$$

On en déduit le tableau suivant résumant l'étude de la convexité de f:

x	$-\infty$		9		∞
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		Concave		Convexe	

On en déduit, par ailleurs, que 9 est le seul point d'inflexion de f.

Venons-en à une propriété importante:

Propriété: Si f est convexe (et dérivable) sur I alors f est au dessus de ses tangentes. Cela revient à dire que:

$$\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$

Si f y est concave (et dérivable), alors elle y est en dessous de ses tangentes:

$$\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a).$$

Voici un exemple d'application de cette propriété:

Exemple: Soit f une fonction convexe dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose, par ailleurs, que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est constante.

Raisonnons par l'absurde: supposons un instant que f ne soit pas constante. On dispose alors de $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$. Supposons, par exemple, $f'(a) > 0$ (l'autre cas se traitant de même). Par la propriété qui précède :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a).$$

Or le membre de droite tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini. Par entrainement:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

ce qui contredit le caractère borné de f: absurde. Ainsi f est constante.

6.5. Application à la preuve d'inégalités

Les deux outils vus jusqu'ici, à savoir la dérivation et la convexité, permettent de prouver des inégalités. Nous allons prouver une inégalité classique de deux manières grâce à ces deux outils. Il faudra, par la suite, retenir cette méthode qui tombe assez souvent au Concours Général.

Exemple: On cherche à montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$$

Méthode 1: Montrer cette inégalité revient à étudier le signe d'une certaine fonction. En effet, cette inégalité équivaut à dire:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - x - 1 \geq 0.$$

Posons alors, pour tout réel x, $f(x) = e^x - x - 1$. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et l'on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1.$$

Dès lors, $f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$. On en déduit le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

On en déduit que f admet un minimul global de 0 atteint en 0. Ainsi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$$

Ce qui entraîne immédiatement l'inégalité souhaitée.

Méthode 2: Cette méthode consiste en fait à identifier une inégalité entre une fonction convexe et sa tangente en un point bien choisi ! On pose alors, pour tout réel x, $f(x) = e^x$. f est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive. Dès lors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f'(0)(x-0) + f(0)$$

Après calcul, comme $f'(0) = 1 = f(0)$, il vient immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x + 1.$$

Ce qui conclut la preuve.

6.6. Complèment: Accroissements finis

On s'intéresse ici à une notion qui n'est pas au programme de Terminale mais qui peut servir au Concours Général (notion déjà tombée).

On va ici énoncer 3 théorèmes d'analyse importants. Toutefois, le programme de Terminale ne permet pas leur démonstration dans le cas le plus général. Ces théorèmes s'appliquent à des fonctions f dérivables, mais nous allons avoir besoin de la continuité de la dérivée pour les établir avec les outils dont on dispose. Ce n'est pas grave puisque quasiment toutes les fonctions étudiées au Concours Général sont indéfiniment dérivables.

6.6.1 Théorème de Rolle

Soit $a < b$ des réels et f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que f' soit continue sur $[a, b]$.

On suppose par ailleurs que $f(a) = f(b)$. Alors:

$$\exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0.$$

Démonstration:

Nous allons d'abord traiter un cas trivial: celui où f est constante sur $[a, b]$. Dans ce cas f' est nulle sur $[a, b]$ et le résultat est évident.

Supposons alors f non constante sur $[a, b]$. On dispose de $c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer $f'(c_1) > 0$ (sinon il suffirait de traiter l'autre cas qui est identique ou bien de considérer $-f$).

Nous allons alors montrer qu'il existe $c_2 \in [a, b]$ tel que $f'(c_2) < 0$. Supposons alors par l'absurde que :

$$\forall x \in [a,b], f'(x) \geq 0. \ (1)$$

Donc f est croissante. Comme f' est continue et $f'(c_1) > 0$, f' est strictement positive sur un voisinage de c_1. On traite d'abord le cas où $c_1 \in]a,b[$. On dispose donc de $\delta > 0$ tel que:

$$\forall x \in [c_1 - \delta, c_1 + \delta], f'(x) > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[c_1 - \delta, c_1 + \delta]$. Dès lors:

$$f(a) \leq f(c_1 - \delta) < f(c_1 + \delta) \leq f(b).$$

Donc $f(a) < f(b)$ ce qui est une contradiction.

Si $c_1 = a$, on dispose de $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [c_1, c_1 + \delta], f'(x) > 0.$$

Dès lors, $f(a) = f(c_1) < f(c_1 + \delta) \leq f(b)$

ce qui fournit la même contradiction. De même, si $c_1 = b$, on dispose de $\delta > 0$ tel que:

$$\forall x \in [c_1 - \delta, c_1], f'(x) > 0.$$

D'où $f(a) \leq f(c_1 - \delta) < f(c_1) = f(b)$. On obtient ainsi la même contradiction. Ainsi, la négation de (1) est vraie, à savoir:

$$\exists c_2 \in [a,b] \mid f'(c_2) < 0.$$

On peut alors supposer $c_2 > c_1$ quitte à renommer l'un en l'autre. Mais alors:

- f' est continue sur $[c_1, c_2]$
- $f'(c_1) > 0$
- $f'(c_2) < 0$

Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [c_1, c_2]$ tel que $f'(c) = 0$. Or $f'(c_1) > 0$ et $f'(c_2) < 0$ donc $c \neq c_1$ et $c \neq c_2$. Autrement dit:

$$c \in]c_1, c_2[\subset]a, b[$$

On a donc montré l'existence de $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque: Comme dit précédemment, ce théorème peut être prouvé seulement dans le cas où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Nous avions besoin de la continuité de f' pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Un théorème un peu plus avancé, du nom du théorème de Darboux, dit, par ailleurs, que si f' n'est pas supposé continue, elle vérifie quand même le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple: Considérons la fonction sinus.

On a $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$. De plus, sin est dérivable de dérivée continue sur $[0, \pi]$.

Ainsi, il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $\sin'(c) = 0$ autrement dit $\cos(c) = 0$.

Effectivement, $\dfrac{\pi}{2} \in]0, \pi[$ et $\cos(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.

Exemple: Nous allons résoudre l'exercice suivant:

Soit $a < b$ des réels. Soit f une fonction 2 fois dérivable de dérivée 2nde continue sur $[a, b]$.

On suppose par ailleurs que $f(a) = f'(a) = 0$ et $f(b) = f'(b) = 0$.

Montrons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Le but est de trouver faire apparaître une fonction intelligemment pour lui appliquer le théorème de Rolle.

Considérons alors la fonction:

$$g : x \in [a, b] \longmapsto e^{-x}(f(x) + f'(x)).$$

g est dérivable car f' et f le sont. Soit alors $x \in [a, b]$. On a:

$$g'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) + e^{-x}f''(x) - e^{-x}f'(x).$$

Autrement dit: $g'(x) = e^{-x}(f''(x) - f(x))$.

Or $g(a) = g(b) = 0$ et g' est continue sur $[a, b]$ car f'' et f le sont. Par le théorème de Rolle:

$$\exists c \in]a, b[| g'(c) = 0 \text{ i.e } e^{-c}(f''(c) - f(c)) = 0$$

Or $\exp(-c) \neq 0$ donc $f''(c) - f(c) = 0$ i.e $f''(c) = f(c)$.

6.6.2. Théorème des Accroissements Finis

Ce théorème découle simplement du théorème de Rolle, mais est réellement capital.

Énoncé: On se donne une fonction f dérivable sur $[a, b]$ $(a < b)$ de dérivée continue. Alors on dispose de $c \in]a, b[$ tel que:

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cela se réecrit aussi : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Démonstration: Soit, pour $x \in [a, b]$, $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

On a $g(a) = g(b) = 0$. De plus, g est dérivable de dérivée continue. Par le théorème de Rolle:

$$\exists c \in]a, b[\mid g'(c) = 0 \text{ i.e } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

6.6.3. Inégalité des Accroissements Finis

Ce théorème est très pratique pour montrer certaines inégalités sur des fonctions qui vous permettront notamment d'étudier des suites. Contrairement aux autres théorèmes, on sait montrer ce théorème dans son cadre le plus général.

Énoncé: Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ $(a < b)$. On suppose par ailleurs qu'il existe des réels M et m tels que:

$$m \leq f'(x) \leq M.$$

Alors pour tout $x > y \in [a, b]$:

$$(x - y)m \leq f(x) - f(y) \leq (x - y)M.$$

Démonstration: Soit $x, y \in [a, b]$ tels que $x > y$. Posons $g(x) = f(x) - mx$.

g est dérivable sur $[a, b]$ et:

$$g'(x) = f'(x) - m \geq 0.$$

Ainsi g est croissante. Comme $x > y$, on a donc $g(x) \geq g(y)$ par croissance de g. Cela se réecrit:

$$f(x) - mx \geq f(y) - my.$$

D'où : $f(x) - f(y) \geq m(x - y)$.

Posons, de même, $h(x) = f(x) - Mx$. Par le même argument, h est décroissante puis $h(x) \leq h(y)$ autrement dit :

$$f(x) - Mx \leq f(y) - My \text{ soit } f(x) - f(y) \leq M(x - y).$$

On a donc montré:

$$m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y).$$

Ceci prouve donc ce théorème.

Cas particulier: Si $m = -M$, autrement dit si:

$$\forall x \in [a,b], -M \leq f'(x) \leq M \text{ (autrement dit } |f'(x)| \leq M.$$

Alors $\forall x \geq y, -M(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x-y)$.

Autrement dit:

$$|f(x) - f(y)| \leq |M||x-y|.$$

et si $M > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

6.7. Exercices:

Voici quelques exercices sur des fonctions d'une variable réelle, sur la dérivation et sur les limites.

Exercice 6.1. Donnez les domaines de dérivabilités puis calculez les dérivées des fonctions suivantes:

- $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{\cos(x)}}$
- $\mathrm{ch} : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ puis $\mathrm{sh} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $x \mapsto x^x$
- $x \mapsto a^x$, où a est un réel strictement positif
- $x \mapsto \dfrac{e^{x^2}}{2\cos(x)}$
- $x \mapsto \ln(\ln(x))$
- $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x^2)}$

Exercice 6.2. Faites l'étude complète (domaine de définition, domaine de dérivabilité, dérivée, convexité, tableau de variations, limites, graphe...) des fonctions suivantes:

- $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$;
- $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$;
- $f(x) = \ln(x^2 + 1)$;
- $f(x) = e^{x^2}$

- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$
- $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$

Exercice 6.3. (Autour des dérivées n-ièmes) Si f est une fonction n fois dérivable, où n est un entier, on notera $f^{(n)}$ la n-ème dérivée de f.

1) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \text{ et } \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

2) Soit $f : x \mapsto \exp(-x^2)$. Montrez l'existence, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, d'un polynôme P_n tel que pour tout réel x:

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$$

3) (Formule de Leibniz) Soit f, g deux fonctions n fois dérivables où $n \geq 0$ est un entier. Montrez :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Et constater l'analogie avec un autre théorème déjà rencontré.

<u>Remarque:</u> Il ne vous aura pas échappé la ressemblance entre ce théorème et la formule du binôme de Newton. La formule du binôme vient en fait d'un résultat bien plus général s'appliquant à tout anneau commutatif (ou du moins à tout anneau si l'on applique la formule à des objets qui commutent entre eux).

Exercice 6.4. Calculez les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{u}{x})^x$ où u est un réel fixé
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x-\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x)$

Exercice 6.5. Trouvez la limite en l'infini de :

- $x \mapsto \cos(x^2)e^{-x}$
- $x \mapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$
- $x \mapsto x\ln(1+\dfrac{2}{x})$

Exercice 6.6. (Continuité entraîne rigidité) Soit $f : I \to J$ une fonction continue.

1) On suppose que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$. Que dire de f ?

2) On suppose que $I = J = [0,1]$. Montrez que f admet un point fixe, ie qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 6.7. Faites l'étude complète de la fonction :

$$\operatorname{sinc} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Continuité? Dérivabilité? Variations? Graphique ?)

Exercice 6.8. Montrez les inégalités (à retenir) suivantes :

- $\forall x \in [2, \infty[, e^x \geq x(x+1)$.
- $\forall x \in]-1, \infty[, \ln(1+x) \leq x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$
- $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$

Exercice 6.9. On considère la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On considère aussi la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour chaque $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrez que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution $r_2 \in]0,1[$.

2. Montrez que $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1].$$

4. Démontrez que:

$$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

5. Démontrez que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|.$$

6. En déduire que $u_n \to r_2$.

7. Trouvez une approximation à 10^{-3} près de r_2 grâce à ce qui a été fait.

Exercice 6.10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

1. Montrez que f est paire.

2. Étudiez les variations de f.

3. Montrez que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $l \geq 0$.

4. Justifiez que $0 \leq l \leq \frac{1}{2}$.

5. Montrez que si $x \geq 0$:

$$|f'(x)| \leq f(x).$$

En déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

6. Montrez que $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$.

7. Montrez que:

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}.$$

8. Montrez que :

$$\forall n \geq 0, |u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|$$

Conclure que $u_n \to l$.

Exercice 6.11. (d'après Concours Général ES/L 2019) Dans cet exercice, u désigne une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on note f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$f(x) = e^{u(x)}.$$

1.a. Montrez que si u est une fonction convexe, alors f est une fonction convexe.

b. La réciproque est-elle vraie ?

2. Pour tout réel λ, on note f_λ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par:

$$f_\lambda(x) = f(x)e^{\lambda x}.$$

a. Montrez que si u est une fonction convexe, alors, pour tout nombre réel λ, la fonction f_λ est convexe.

b. Réciproquement, montrez que si, pour tout nombre réel λ, la fonction f_λ est convexe, alors u est une fonction convexe.

Exercice 6.12. ($\star\star\star\star$) D'après Concours Général 2005. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout réel $x \in [0, \frac{7}{10}]$, $f(x + \frac{3}{10}) \neq f(x)$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins 7 solutions.

2) Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ; on pourra se contenter d'un schéma.

Exercice 6.13. Trouvez toutes les fonctions deux fois dérivables dont la dérivée seconde est continue telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(7x + 4) = 49f(x).$$

Exercice 6.14. (d'après Concours Général 1996)

1. Soit la fonction f définie, pour tout réel x strictement positif, par $f(x) = x^x$. Déterminer la valeur minimale prise par cette fonction lorsque x décrit l'ensemble des réels positifs.
2. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que

$$x^y + y^x > 1$$

7. Suites

7.1. Études de suites:

Il vous sera parfois demander d'étudier des suites définies par récurrence à l'aide de fonctions i.e des suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Pour ce faire, on dispose de deux outils principaux: les études de fonctions et les théorèmes étudiés dans cette partie. Inspirez-vous de ce qui est fait dans les exemples pour résoudre les exercices. L'idée qui revient souvent est d'étudier f pour en déduire des informations sur la monotonie et pour savoir si (u_n) est bornée ou non.

7.1.1. Théorème de convergence monotone:

Le théorème clé pour montrer la convergence d'une suite en terminale est le **théorème de convergence monotone**. Il s'énonce ainsi:

Soit (u_n) une suite croissante et majorée par une constante M. Alors (u_n) converge vers un réel $l \leq M$

De même, si (u_n) est décroissante et minorée par une constante m, alors (u_n) converge vers un réel $l \geq m$.

Il peut être utile de retenir que si (u_n) est croissante (resp. décroissante) et non majorée (resp. minorée) alors elle tend vers l'infini (resp. $-\infty$).

Voici un exemple qui permet de montrer qu'une somme partielle converge.

Exemple: Posons, pour tout entier naturel n:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Il s'agit de montrer que (u_n) converge. Commençons par étudier sa monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que (u_n) est strictement croissante ! Pour montrer qu'elle est majorée, nous allons procéder à une majoration astucieuse pour faire apparaître une somme télescopique. Elle repose sur le fait suivant:

$$\forall 2 \leq k \leq n, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

Cette inégalité est due au fait que $k \geq k-1$. Dès lors, on peut écrire:

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \end{aligned}$$

Le lecteur pourra alors vérifier que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Dès lors :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n} \text{ par télescopage.} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

On en déduit que (u_n) est croissante et majorée par 2. Elle converge donc un vers un réel $l \leq 2$.

On peut déterminer l, mais cela n'est pas aisé (cf les problèmes dans la suite).

7.1.2. Le théorème des gendarmes

Un théorème similaire, permettant de montrer l'existence d'une limite, est le **théorème des gendarmes**. Il s'énonce ainsi:

Soit $(a_n), (b_n)$ et (c_n) trois suites réelles telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \leq c_n.$$

On suppose par ailleurs que $a_n \to l \in \mathbb{R}$ et $c_n l \in \mathbb{R}$. Autrement dit que (a_n) et (c_n) ont la même limite.

Alors (b_n) converge vers l i.e (b_n) converge et a la même limite que (a_n) et (b_n).

Exemple: On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

Fixons $n \geq 1$. Comme $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, on en déduit:

$$\frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit, par le théorème des gendarmes que:

$$u_n \to 0.$$

7.1.3. Le théorème du point fixe

Le théorème clé pour trouver les limites de telles suites une fois que l'on sait qu'elle converge est le **théorème du point fixe**. Il s'énonce ainsi :

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel l. On suppose de plus qu'il existe une fonction f continue en l telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors:

$$l = f(l).$$

Exemple: On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n).$$

Trouvons la limite, si elle existe, de cette suite. On commence par montrer l'existence de cette limite, sans quoi on ne peut avoir recours au théorème du point fixe. Pour ce faire, on va étudier la fonction définissant (u_n). On pose, pour tout réel x:

$$f(x) = x(1 - x) = x - x^2.$$

Une remarque essentielle (à laquelle il faudra toujours penser) est la suivante:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = -x^2 \leq 0.$$

Fixons alors $n \in \mathbb{N}$. On a alors:

$$f(u_n) \leq u_n \text{ i.e } u_{n+1} \leq u_n.$$

On a donc très facilement montré la décroissance de (u_n). Si l'on parvient à montrer qu'elle est minorée, on pourrait conclure ! Pour ce faire, étudions f sur $[0, 1]$:

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = 1 - 2x$$

Donc $f'(x) \geq 0 \iff x \leq \dfrac{1}{2}$. On en déduit le tableau de variations suivant:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Ainsi: $\forall x \in [0,1], 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4} \leq 1$. Une récurrence simple laissée au lecteur montre qu'alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1].$$

En particulier (u_n) est décroissante et minorée par 0. Le théorème de convergence monotone montre alors que u_n converge vers un certain $l \in [0,1]$. f étant continue sur $[0,1]$, le théorème du point fixe assure que:

$$f(l) = l$$

i.e :

$$l - l^2 = l$$

d'où $l = 0$ et $u_n \to 0$.

7.2. Théorème des suites adjacentes

Voici un théorème qu'il fallait utiliser dans certains sujets de concours général. Il sert à montrer l'existence d'une limite commune à deux suites étant données certaines hypothèses sur ces suites.

Veuillez noter que, ce théorème étant hors programme de terminale, il faudra le redémontrer à chaque fois que vous l'utilisez. En voici un énoncé:

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que:

- (a_n) est croissante;
- (b_n) est décroissante;
- $a_n - b_n \to 0$.

Alors (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite. On dit alors que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

On remarquera notamment que l'on ne sait pas (à priori dans les hypothèses) que (a_n) ou (b_n) convergent et que cette convergence est fournie par le théorème.

Démonstration:

Définissons, pour chaque entier naturel n, $w_n = a_n - b_n$. (w_n) étant la somme de deux suites croissantes ((a_n) et $(-b_n)$), (w_n) est croissante. Or celle-ci tend vers 0 donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq 0 \text{ ie } a_n \leq b_n.$$

Or (a_n) est croissante et (b_n) décroissante d'où :

$$a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0.$$

(a_n) est donc croissante et majorée par b_0 donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $a \in \mathbb{R}$. De même, (b_n) est décroissante et minorée par a_0 et converge donc vers une limite $b \in \mathbb{R}$.

Mais alors, $a_n - b_n \to a - b$. Or $a_n - b_n \to 0$ d'où, par unicité de la limite, $a - b = 0$ donc $a = b$. $\square$

Ce théorème sert notamment à démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

7.3. Passage à la limite dans les inégalités larges

Ce théorème doit parfois être utilisé au concours général bien qu'il ne soit pas explicitement au programme de Terminale. On se contente de l'énoncer ici:

Soit (a_n) et (b_n) des suites qui convergent respectivement vers $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On suppose par ailleurs que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$$

Ce théorème affirme que:

$$a \leq b$$

On dit qu'on est passé à la limite dans les inégalités larges.

En particulier s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, C \leq a_n \text{ alors } C \leq a.$$

Attention ! Si l'on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n < b_n$$

la conclusion reste la même et ne devient sutout pas:

$$a < b.$$

Un contre-exemple possible et la suite (a_n) constante égale à 0 et pour chaque entier naturel $n, b_n = \frac{1}{n}$. On a bien:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 = a_n < b_n = \frac{1}{n}$$

Or la limite de (b_n) est 0 et il n'est pas vrai que $0 < 0$...

7.4. Suites implicites:

Il est parfois demandé, dans des sujets du concours général, d'étudier des suites dites implicites. Ces suites peuvent être obtenues comme les solutions d'une équation paramétrées par un entier naturel. Voici un exemple d'un tel exercice:

Exemple: On définit, pour tout réel strictement positif x:

$$f(x) = x + \ln(x).$$

Le but du problème est de montrer, pour tout entier naturel n, l'existence et l'unicité d'un réel $x_n \in]0, \infty[$ tel que $f(x_n) = n$ puis de s'intéresser à la limite de la suite (x_n).

Fixons donc $n \in \mathbb{N}$. On cherche à montrer l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation $f(x) = n$: on pense immédiatement au théorème des valeurs intermédiaires.

- f est continue sur $]0, \infty[$ par somme de fonctions continues sur cet intervalle;
- f est strictement croissante par somme de fonctions strictement croissantes;
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty < n$;
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty > n$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$. Cela fournit donc une suite (x_n) que l'on peut étudier.

Dans ce genre de problème, garder le tableau de variations de f en tête peut se révéler salvateur:

x	0	x_n	∞
f	$-\infty$	$\nearrow n \nearrow$	∞

Il semble assez clair, intuitivement, que lorsque n croît, il faut que x_n devienne plus grand aussi pour maintenir la relation $f(x_n) = n$. On va donc montrer que (x_n) est croissante. Pour cela on remarque:

$$n < n + 1$$

i.e:

$$f(x_n) < f(x_{n+1})$$

Or f est strictement croissante sur $]0, \infty[$ d'où :

$$x_n < x_{n+1}$$

(x_n) est donc strictement croissante. Par le même argument que précédemment, il semble intuitivement clair que x_n tend vers l'infini avec n. Montrons-le à l'aide du théorème de convergence montone. Si (x_n) ne tendait pas vers l'infini, alors elle est majorée (car croissante) d'après le théorème de convergence monotone. Elle converge donc vers un réel l.

Remarquons d'ailleurs que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_0 < x_n.$$

En passant à la limite dans les inégalités larges:

$$0 < x_0 \leq l.$$

Mais alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n + \ln(x_n) = n.$$

Le membre de gauche converge vers $f(l)$ tandis que le membre de droite tend vers l'infini: absurde puisque ces deux membres sont égaux.

Ainsi $x_n \to \infty$.

Le schéma d'étude de suites implicites est donc toujours le même: on étudie une fonction f pour trouver une solution à une équation et l'on s'aide de cette équation ainsi que de l'étude de f pour en déduire des informations sur une suite.

7.5. Définition d'une limite d'une suite:

Expliquons ce qu'est la limite d'une suite, notion entrevue en terminale :

Soit (u_n) une suite de réels. On dira que $u_n \to l \in \mathbb{R}$ (u_n tend vers l) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Quelques remarques: ε est à penser comme une quantité très petite. Ce que l'on est alors en train de dire, c'est que pour n'importe quel ε, aussi petit qu'il soit ($\forall \varepsilon > 0$), il existe un rang N, tel qu'à partir de ce rang ($\exists N \in \mathbb{N} \mid, \forall n \geq N$), les termes u_n de la suite (u_n) sont à distance au plus ε (une distance petite) de l ($|u_n - l| \leq \varepsilon$). Ainsi, quitte à attendre assez longtemps, u_n deviendra très proche de l.

De la même manière, $u_n \to \infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \geq A$$

Ici il faut comprendre que A devient aussi grand qu'on veut.

a) Représentez la définition de la convergence vers une limite l sur un dessin.

b) Expliquer en français (à soi même) la définition de la divergence vers l'infini d'une suite. En faire un dessin aussi.

c) Proposer de même une formule avec quantificateurs signifiant la divergence vers $-\infty$.

7.6. Exercices:

Dans la suite, il sera très utile de regarder des petites valeurs de n, tester des cas particuliers de suites, faire des dessins. Il ne faut pas se jeter directement sur une preuve sans avoir d'idée de ce qu'il se passe !

Exercice 7.1. Soit (u_n) une suite convergente. Montrez que (u_n) est bornée i.e montrez l'existence de constantes A, B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A \leq u_n \leq B$$

Exercice 7.2. Que peut-on dire d'une suite (u_n) telle que $((-1)^n u_n)$ converge ?

Exercice 7.3. On définit la suite de Fibonacci de la manière suivante :

$$F_0 = F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

2.a) Montrez que: $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$

2.b) Montrez que: $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$

2.c) En quoi les questions 2.a) et 2.b) couplées sont elles surprenantes ?

Exercice 7.4. Etudier la convergence des suites suivantes (et calculer leurs limites si elles existent):

- $u_0 \in [0, \pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sin(u_n)$
- $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$
- $u_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{u_n}$ (On donnera un encadrement de la limite, mais pas de valeur exacte)

- $u_0 \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : [0,1] \to [0,1]$ est telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

(On montrera que (u_n) converge vers un point fixe de f, i.e un $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = l$) Attention à la rigueur...

Exercice 7.5. Étudiez la limite de la suite de terme général :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$
- $\dfrac{1 + 2\sin(n)}{\sqrt{n}}$
- $\dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$

Exercice 7.6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dbinom{2n}{n} 2^{-2n}$.

1. Montrez que la suite $((n+1)u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 7.6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$$

On pose alors pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) Montrez que (v_n) est géométrique et en déduire une expression de (u_n) en fonction de n.

2) Soit alors (w_n) la suite définie par $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \sqrt{w_n w_{n+1}}$$

Trouvez la limite de (w_n).

Exercice 7.7. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n:

$$u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + \sin(u_n).$$

Étudiez la convergence de cette suite.

Exercice 7.8. Quelle est la limite de la suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor \frac{k^2}{n} \rfloor$$

Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 7.9. ($\star\star\star\star$) On dira (ici) que $u_n \sim v_n$ (lire u_n est équivalent à v_n) si v_n n'est pas nulle à partir d'un certain rang et que $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.

Devinez un équivalent simple des quantités suivantes, puis prouvez votre affirmation.

$$\sum_{k=1}^{n} k! \qquad \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$$

Exercice 7.10. Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ pour lesquelles $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = 1$. Montrez qu'alors:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

Exercice 7.11. Soit (a_n) et (b_n) deux suites strictement positives. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Montrez qu'alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exercice 7.12. ($\star\star\star$) Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 \geq 0$ et pour tout entier naturel non nul n: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

Exercice 7.13. Déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice 7.14. Dans chacune des situations suivantes, on identifiera une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. En étudiant cette fonction, on étudiera la nature de (u_n) en fonction de la valeur de u_0. (Méthode à retenir lorsque vous voyez une suite définie de la sorte.)

- $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
- $u_{n+1} = \sqrt{u_n+4}$
- $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+u_n}{2}$

- $u_{n+1} = \exp(u_n)$
- $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$
- $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^2}{4}$

Exercice 7.15. ($\star\star$) Soit $\alpha \in [0,1]$. Étudier la nature de la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et pour tout entier naturel n:

$$u_{n+1} = (1 - u_n)\sin(u_n).$$

Exercice 7.16. ($\star\star$) Soit f la fonction qui à un élément de $[3, \infty[$ associe $\dfrac{2x^2 - 3}{x+2}$. On pose par ailleurs (x_n) la suite définie par $x_0 = 5$ et pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

1. Montrez que pour tout $x \in [3, \infty[$, $3 \leq f(x)$.

2. Étudiez la monotonie de (x_n).

3. En déduire la limite de x_n.

4. On procède à présent d'une autre manière. Montrez que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; x_{n+1} \geq 2x_n - 4$$

5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 2^n + C$ où C est un réel à préciser. Conclure.

Exercice 7.17. On note (x_n) la suite définie par $x_0 = 2$ et pour tout entier naturel n: $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}$.

1. Étudiez la convergence de (x_n).

2. Pour tout entier naturel n, on pose $\varepsilon_n = \dfrac{x_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$. Montrez que pour tout entier naturel n:
$$0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_n^2.$$

3. Montrez que pour tout entier naturel non nul n:
$$0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{10^{2^{n-1}}}.$$

La convergence de (x_n) est-elle lente ou rapide ?

Exercice 7.18. Soit $a < b$ des réels et f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que:

- f est strictement croissante sur $[a, b[$
- $f(a) \leq 0$ et $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = n$ d'inconnue $x \in [a, b[$ admet une unique solution x_n pour chaque entier naturel n.

2. Étudiez la monotonie de la suite (x_n).

3. Étudiez $\lim_{n \to \infty} x_n$.

Exercice 7.19. Soit I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout entier naturel n:

- l'équation $f_n(x)$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution x_n.
- la fonction f_n est strictement croissante sur I.
- Pour chaque $x \in I$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Étudiez la monotonie de (x_n).

Exercice 7.20. (Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires) Soit $a < b$ des réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. On définit par récurrence les 3 suites suivantes :

- $a_0 = a$,$b_0 = b$ et $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
- $\forall k \geq 0$, $x_{k+1} = \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$
- $a_{k+1} = a_k$ si $f(a_k)f(b_k) < 0$ et $a_{k+1} = x_k$ sinon
- $b_{k+1} = x_k$ si $f(a_k)f(b_k) < 0$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon

1. Montrez que (a_k), (b_k) et (x_k) convergent vers une même limite.

2. Montrez que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(a_k)f(b_k) \leq 0.$$

En déduire le théorème des valeurs intermédiaires.
3. (vitesse de convergence) Démontrez que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

Exercice 7.21. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$ et a, b deux suites réelles définies par $a_0 = \alpha$, $b_0 = \beta$ et:

$$\forall n \geq 0, a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n).$$

1. Montrez que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n.$$

2. Montrez que ces deux suites convergent vers une même limite.

Exercice 7.22. 1. Montrez que pour tout entier naturel non nul n, l'équation :

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet une unique solution x_n.

2. Montrez que pour tout entier naturel non nul n:

$$x_n^{n+1} = 2x_n - 1.$$

3. Montrez que la suite (x_n) converge et déterminez sa limite.

Exercice 7.23. Montrez qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tels que :

$$x_n^n = \cos(x_n).$$

Étudiez la nature de (x_n) et sa limite si elle existe.

Exercice 7.24. $(\star\star\star\star)$

1. Montrez que l'équation $\ln(x) = -nx$ d'inconnue $x \in]0, \infty[$ admet une unique solution x_n pour tout entier naturel n.

2. Calculez :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx_n}{\ln(n)}.$$

Exercice 7.25. Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies par : $a_0, b_0 \in \mathbb{R}^+$ et :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrez que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géometrique de a_0 et b_0.

Exercice 7.26. $(\star\star\star\star\star)$ (Modeste extrait d'un *magnifique* sujet de l'ENS Cachan de 1991)

Etant donnés un entier $q \geq 1$, des réels $r_1, \ldots, r_q$ strictement positifs et de somme > 1, des entiers $m_1, \ldots, m_q$, deux à deux distincts et supérieurs ou égaux à 2, on cherche à étudier le comportement de la suite (a_n) définie par: $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, a_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} r_j a_{\lfloor n/m_j \rfloor}$.

1. Montrez qu'il existe un unique réel $a > 0$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} r_j m_j^{-a} = 1$.

2. Montrez qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 1,\ a_n \leq Cn^a.$$

3. Montrez que :

$$\forall n \geq 0, a_n \leq (n+1)^a.$$

(On pourra montrer et utiliser l'inégalité : $\forall n \geq 0, 1 + \lfloor \frac{n}{m_j} \rfloor \geq \frac{n+1}{m_j}$.)

4. Montrez que (a_n) est croissante et que, si on pose pour tout réel $x \geq 0$ $A(x) = a_{\lfloor x \rfloor}$, alors :

$$0 \leq x < 1 \implies A(x) = 1 \text{ et } \forall x \geq 1, A(x) = \sum_{j=1}^{q} r_j A(x/m_j).$$

On pourra commencer par montrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $m \geq 1$: $\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \rfloor = \lfloor \frac{x}{m} \rfloor$.

Exercice 7.27. ($\star\star\star\star$) Soit n un entier naturel. Après avoir montré l'existence et l'unicité d'un $x_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $e^{-nx_n} = \sin(\pi x_n)$. Trouvez la limite de (x_n).

Exercice 7.28. ($\star\star\star\star\star$) (Oral de l'École polytechnique) Soit (a_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels. Que dire de la convergence de la suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\text{ppcm}(a_0, \ldots, a_k)}$$

Exercice 7.29. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $u_n = \sqrt{\frac{u_0^2 + \cdots + u_{n-1}^2}{2n}}$.

1) Montrez que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrez que (u_n) est décroissante. Que dire de sa convergence?

3) Établir une relation de récurrence d'ordre 1 suivie par (u_n).

4) Montrez par récurrence que pour tout entier naturel non nul n:

$$u_n^2 = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \ldots (1 - \frac{1}{2n}).$$

5) En déduire l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_n \leq \exp(-\frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}))$$

Exercice 7.30. ($\star\star\star\star$) Étudiez la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin(\pi(3+\sqrt{5})^n)$$

Exercice 7.31. ($\star\star\star\star$) (Concours Général 1995) Étudiez la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

Exercice 7.32. ($\star\star\star\star\star$) On s'intéresse ici à la fameuse suite $(\Pi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui à un entier naturel n associe le nombre de nombres premiers inférieurs à n.

1) Soit m un entier naturel non nul et P_m le produit des nombres premiers $p \leq m$. Montrez que, si p est un nombre premier tel que $m+1 < p \leq 2m+1$ alors p divise $\binom{2m+1}{m}$. Comparez P_{2m+1} et $\binom{2m+1}{m}P_{m+1}$.

2) Montrez par récurrence que, si $m \geq 2$ est un entier, alors :

$$P_m \leq 4^m$$

3) En déduire, pour m et n entiers avec $n \geq m \geq 2$:

$$\Pi(n) \leq \Pi(m) + \frac{n\ln(4)}{\ln(m+1)}$$

4) Conclure que:

$$\Pi(n) \leq \frac{2\ln(4)n}{\ln(n)} + \sqrt{n}$$

Remarque: Cette suite est capitale. Elle a fait coulé $-$ et continue de faire couleur $-$ beaucoup d'encre. Cette inégalité que nous venons d'établir est due à Tchebychev (bien que la preuve suivie ici soit due à Erdös) et n'est pas si mauvaise que ça. En réalité notre suite est équivalente à $\frac{n}{\ln(n)}$.

Exercice 7.33. ($\star\star\star\star\star$) D'après Concours Général 1992, Exercice IV.

Soit (u_n) la suite définie par

$$0 < u_0 < 1,\ 0 < u_1 < 1, \text{ et la relation de récurrence :}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n})$$

a) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

b) Montrer qu'il existe un rang n_0 (que l'on ne cherchera pas à déterminer) à partir duquel (u_n) est monotone.

Exercice 7.34. ($\star\star\star\star\star$) D'après IMC (International Maths Olympiads for University Students)

Soit (a_n) une suite strictement comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1. On définit (x_n) par :

$$x_0 = a_0,\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n}$$

Quelles sont les limites possibles de (x_n) ? Peut-elle diverger ?

Exercice 7.35. ($\star\star\star\star\star$) (Concours Général 1998) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n, la relation:

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$$

Montrez qu'il existe un entier p non nul tel que la relation $u_{n+p} = u_n$ ait lieu pour tout entier naturel n.

Exercice 7.36. ($\star\star\star\star\star$) (Concours Général 1996) Soit a un entier impair et b un entier strictement positif. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = b$ et pour tout entier naturel n, si u_n est pair alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, sinon $u_{n+1} = a + u_n$.

1) Montrez qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \leq a$.

2) Montrez que la suite est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 7.37. ($\star\star\star$) Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \text{ (n racines)}.$$

et l'on pose aussi :

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$$

Montrez que $2^{-n}v_n \to \frac{2}{\pi}$.
On montrera pour cela que $u_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$

Exercice 7.38. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}$$

Prouvez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminez sa limite l.

Exercice 7.39. Soit $n \geq 1$. On pose:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrez que ces deux suites convergent vers même une limite.

8. Intégration

Voici les points clés à retenir du cours d'intégration, souvent traité assez tard dans l'année.

8.1. Notion d'intégrale et de primitive:

Si f est une fonction **continue**, on note généralement F une primitive de f, c'est-à-dire une fonction telle que :

$$F' = f.$$

Attention, F est **UNE** primitive de f. Il en existe plusieurs (par exemple $F+C$ où $C \in \mathbb{R}$).

Si $a < b$ sont deux réels, on définit alors l'intégrale de f entre a et b par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{\text{déf}}{=} [F(t)]_a^b.$$

Cette quantité correspond à l'aire sous la courbe de f entre les points a et b.
Voici la liste des primitives usuelles:

Fonction	Primitive
1	x
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$u' \cdot u^n$, $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$

Remarque: L'approche de l'intégrale en Terminale n'explique pas grand chose. On pourra simplement ici retenir le **Théorème fondamental de l'analyse**:

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, $(a < b)$, alors :

$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est une fonction dérivable dont la dérivée est f. (On remarque en particulier que cette fonction est donc continue et que sa dérivée est aussi continue)

Exemple: Soit $f : [0,1] \to [0,1], t \mapsto t$. Calculons:

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 tdt.$$

On remarque, en posant pour $t \in [0,1]$ $F(t) = \frac{t^2}{2}$, que $F'(t) = t = f(t)$. Dès lors:

$$\int_0^1 tdt = [\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

8.2. Propriétés de l'intégrale:

Soit alors f, g deux fonctions continues et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Voici des propriétés de l'intégrale :

- Si $a \leq b$ et f, g sont telles que : $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

- En particulier, si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- L'intégration est linéaire: si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors:

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

- Relation de Chasles: $\int_a^d f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt$
- Si u, v sont des fonctions dérivables, alors :

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

- Si f est une fonction impaire continue sur $[-a, a]$, alors:

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0.$$

Si f est une fonction paire continue sur $[-a, a]$, alors:

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$$

8.3. Intégration par parties:

Il est nécessaire de retenir la formule de l'intégration par parties. Prouvons-le ici:

Soit u, v deux fonctions dérivables de dérivée continue et $a < b$ des réels. Alors :

$$\text{(uv)'} = \text{u'v} + \text{uv'}$$

Dès lors :

$$\text{u'v} = \text{(uv)' - uv'}$$

Mais alors par linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Or uv est une primitive de $(uv)'$ par définition, d'où la formule de l'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [(uv)(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Celle-ci peut s'avérer utile car le terme dit "tout intégré" ($[(uv)(t)]_a^b$) est tout à fait calculable. Ainsi, si l'intégrale du membre de gauche est dure à calculer, on peut s'en sortir en se ramenant au calcul de l'intégrale du membre de droite qui est, parfois, plus simple à calculer. Il s'agit donc d'identifier des fonctions u et v judicieusement.

Voici un exemple astucieux d'utilisation de l'intégration par parties. On cherche à calculer :

$$I = \int_e^{e^2} \ln(t)dt$$

On remarque que $I = \displaystyle\int_e^{e^2} 1 \ln(t)dt$

On applique alors la formule d'intégration par parties en intégrant 1 et en dérivant $\ln(t)$, il vient :

$$I = [t\ln(t)]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} t \cdot \frac{1}{t}dt = 2e^2 - e - \int_e^{e^2} dt = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Il est parfois utile d'utiliser l'intégration par parties pour obtenir des relations de récurrence en abaissant un degré. Voici un exemple typique:

Exemple: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $X > 0$, on pose $I_n(X) = \displaystyle\int_0^X t^n e^{-t}dt$. L'objectif de cet exemple est de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{X \to \infty} I_n(X) = n!.$$

On commence par obtenir une relation de récurrence sur $I_n(X)$. Fixons $X > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. En dérivant t^{n+1} (donc en abaissant le degré) et en primitivant e^{-t}, il vient:

$$\begin{aligned} I_{n+1}(X) &= [-t^{n+1}e^{-t}]_0^X - \int_0^X (n+1)t^n \cdot (-e^{-t})dt \\ &= -X^{n+1}e^{-X} + (n+1)\int_0^X t^n e^{-t}dt. \end{aligned}$$

Autrement dit:

$$I_{n+1}(X) = -X^{n+1}e^{-X} + (n+1)I_n(X).$$

Pour chaque entier naturel n, on note alors H_n la propriété $\lim_{X \to \infty} I_n(X) = n!$ que l'on montre par récurrence:

<u>Initialisation:</u> Soit $X > 0$. Pour $n = 0$, il suffit de remarquer que $I_0(X) = [-e^{-t}]_0^X = 1 - e^{-X}$.

Ainsi $\lim_{X \to \infty} I_0(X) = 1 = 0!$ ce qui prouve H_0.

<u>Hérédité:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Suppons H_n et montrons H_{n+1}.

D'après la relation de récurrence que nous avons trouvé, pour tout réel $X > 0$:

$$I_{n+1}(X) = -X^{n+1}e^{-X} + (n+1)I_n(X).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\lim_{X \to \infty} I_n(X) = n!$. Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim_{X \to \infty} X^n e^{-X} = 0$. Ainsi:

$$\lim_{X \to \infty} I_{n+1}(X) = (n+1)n! = (n+1)!$$

Ce qui prouve H_{n+1}.

<u>Conclusion:</u> D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{X \to \infty} I_n(X) = n!.$$

Pour votre culture, on note alors:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!.$$

8.3. Exercices:

Voici des exercices pour vous entraîner :

Exercice 8.1. Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3t)dt$

2. $\displaystyle\int_0^{1} e^{3t}dt$

3. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{t}{1+t^2}dt$

4. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dt}{t(t+1)}$

5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{1+e^t}$

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)dt,\ p,q\in\mathbb{N}$

7. $\displaystyle\int_0^{3} t^2e^{-t^3}dt$

8. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\sin(t)-t\cos(t)}{t^2}dt$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3t)+2\sin(5t)dt$

10. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \frac{3t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

11. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{t^2}{t^3-1}dt$

12. $\displaystyle\int_0^{1} (1-2t)^5dt$

13. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{dt}{(1-t)^n},\ n\in\mathbb{N}^*$

14. $\displaystyle\int_{-2023}^{2023} x^{2023}\sqrt{|\cos(x^2)|e^{-x^2}}\sin(x^2)dx$

Exercice 8.2. Calculez les intégrales suivantes:

$$\int_1^2 t\ln(t)dt \qquad \int_1^2 t^2e^tdt$$

Exercice 8.3. Calculez les intégrales suivantes:

$$\int_0^1 (\ln(t))^2dt \qquad \int_1^2 t^2\ln(t)dt \qquad \int_1^2 e^{2t}\cos(3t)dt$$

Exercice 8.4. Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$.

1) Calculez I_1.

2) Déterminez le minimum sur $[0,1]$ de $\dfrac{1}{1+e^t}$. En déduire la limite de I_n.

3) Pour $n\in\mathbb{N}$, calculez I_n+I_{n+1}.

4) Calculez I_0 et I_2.

5) Montrez que (I_n) est croissante.

6) Déterminez la limite de la suite $(ne^{-n}I_n)$.

Exercice 8.5. Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$. Montrez que :

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0.$$

Exercice 8.6. Calculez les intégrales suivantes:

- $\displaystyle\int_0^x \cos^2(\theta) d\theta$
- $\displaystyle\int_0^x \sin^2(\theta) d\theta$
- $\displaystyle\int_0^x \cos^3(2\theta)\sin^2(\theta) d\theta$ (Utiliser les formules d'Euler)

Exercice 8.7. (Démonstration plus rapide des théorèmes relatifs aux accroissements finis dans le cas où f' est continue: à connaître) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue.

1. On suppose ici que $f(a) = f(b)$.

1.a. Exprimez $f(b) - f(a)$ grâce à une intégrale. On justifiera bien pourquoi cette expression est licite.

1.b. En déduire l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$. (Ce n'est pas tout à fait le théorème de Rolle, mais cette méthode peut être adaptée dans des cas concrets pour aboutir aux mêmes conséquences).

2. Retrouvez le théorème des accroissements finis. (On ne changera pas la méthode déjà présentée précédemment)

3. On suppose qu'il existe m, M des réels tels que:

$$\forall x \in [a, b], m \leq f'(x) \leq M.$$

Retrouvez, plus rapidement, à l'aide de l'intégration, l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 8.8. Soit $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrez:

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.

Exercice 8.9. Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$. Montrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2dt}$$

Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.

Exercice 8.10. On pose pour tout entier naturel n: $I_n = \displaystyle\int_1^n (\ln(t))^n dt$.

1. Montrez que (I_n) est convergente.

2. Montrez que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

3. En déduire: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

4. On pose désormais pour tout entier naturel n : $u_n = (-1)^n \dfrac{I_n}{n!}$. Trouvez une relation de récurrence pour (u_n).

5. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 8.11. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrez que f admet un point fixe.

Exercice 8.12. On pose pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt.$$

1. Montrez que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}.$$

2. En déduire que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3. En déduire une expression simplifiée de :

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}.$$

Exercice 8.13. Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{t/n} dt.$$

1. Pour $t \in [0,2]$ on pose $\phi(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$. Montrez que :
$$\frac{3}{2}e^{t/n} \leq \phi(t)e^{t/n} \leq \frac{7}{4}e^{t/n}.$$
2. En déduire :
$$\frac{3}{2}n(e^{2/n}-1) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n(e^{2/n}-1).$$
3. En déduire que si (u_n) admet une limite l alors :
$$3 \leq l \leq 7/2.$$
4. Calculez l'intégrale :
$$I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt$$
5. Montrez que $I \leq u_n \leq e^{2/n}I$. En déduire la limite de (u_n)

Exercice 8.14. Justifier l'existence de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1.$$
Prouver que f est croissante, déterminer ses limites en ∞ et en $-\infty$. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini (i.e une fonction g simple telle que g est non nulle pour x assez grand et telle que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$).

8.4. Comparaison somme intégrale:

Parlons à présent d'une méthode cruciale: **la comparaison somme intégrale**. Comme son nom l'indique, on va comparer une somme à une intégrale. Précisons les choses : soit f une fonction continue et monotone. Pour fixer les idées, supposons-la décroissante dans un premier temps.

Fixons $k \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à l'intervalle $I_k = [k; k+1]$.

Pour $t \in I_k$, la décroissance de f assure que:
$$f(t) \leq f(k).$$
En intégrant alors de k à $k+1$, il vient:
$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k).$$
De même, pour $t \in J_k = [k-1, k]$:

$$f(t) \geq f(k)$$

En intégrant:

$$\int_{k-1}^{k} f(t)dt \geq \int_{k-1}^{k} f(k)dt = f(k)$$

On en déduit l'encadrement:

$$\int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$

On peut désormais sommer cette inégalité pour k allant de 1 à n:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$

Par la relation de Chasles :

$$\int_{1}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(t)dt.$$

Un raisonnement identique, si f était croissante, aurait donné l'inégalité inverse; il faut savoir s'adapter et refaire la démonstration pour chaque situation.

Attention, parfois vous ne pourrez pas intégrer la fonction pour $k = 0$ par exemple alors que vous voudrez faire intervenir la somme $\sum_{k=0}^{n} f(k)$. C'est pas grave, appliquez la comparaison somme intégrale en sommant de 1 à n, puis ajoutez $f(0)$ à chaque membre de l'inégalité. Cette majoration n'est pas trop grossière...

Exercice 8.15. Appliquez la comparaison somme intégrale à la fonction f définie pour tout réel strictement positif t par $f(t) = \dfrac{1}{t\ln(t)}$. En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 8.16. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Trouvez un équivalent de (u_n) (i.e une suite (v_n) telle que v_n n'est pas nul pour n assez grand et tel que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.)

9. Probabilités et combinatoire

9.1. Combinatoire

Intéressons-nous à la combinatoire, un chapitre aussi intéressant que déroutant. On rappelle les points clés suivants:

Propriété 1: Si A est un ensemble fini à n éléments, le nombre de façons de choisir $1 \leq k \leq n$ éléments de A est : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exemple: Il y a, dans un sac, 30 balles de tennis de table. 4 sont jaunes, 8 sont bleues et 18 sont oranges. On tire au hasard 7 balles dans le sac. On cherche le nombre de façons dont on peut tirer exactement 2 boules jaunes.

Il y a $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ façons de tirer 2 balles jaunes et $\binom{26}{5} = 65780$ façons de choisir les 5 balles qu'il reste à tirer dans les $30 - 4 = 26$ balles qui ne sont pas jaunes. On notera le principe suivant (qui découle du lemme des Bergers) : **on multiplie les nombres de choix**. Ainsi, le nombre de façons de tirer exactement 2 balles jaunes parmi les 30 est :

$$6 \times 65780 = 394680.$$

Propriété 2: Si A est un ensemble fini à n éléments alors A a exactement 2^n parties.

Preuve: Méthode 1: On s'intéresse au nombre de parties de A à k éléments pour $0 \leq k \leq n$. D'après ce qu'on vient de voir, il y a $\binom{n}{k}$ telles parties. Or le nombre de parties de A correspond à la somme des nombres de parties à k éléments de A pour chaque $0 \leq k \leq n$. Autrement dit, il s'agit de:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Méthode 2: Écrivons $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour construire une partie B de A, il suffit de choisir les x_1 qui seront élément de B et ceux qui ne le seront pas.

Pour chaque x_i, on a 2 choix: soit on le choisit, soit on le choisit pas. Or il y a n tels x_i. Comme on multiplie les choix, il y a:

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 \text{ n } 2 = 2^n \text{ choix.}$$

Propriété 3: Le nombre de façons d'arranger/de permuter n objets est $n!$.

Exemple: 5 personnes forment une chaîne dans un supermarché. On cherche à déterminer le nombre de chaînes que l'on peut former. Autrement dit, on cherche le nombre de façons dont on peut permuter ces 5 personnes dans la chaîne.

Si l'on numérote ces individus de 1 à 5, des exemples de permutations sont:

$$1,2,3,4,5,\ 2,1,3,5,4 \text{ ou encore } 1,3,2,4,5.$$

D'après la propriété précédente, il y a $5! = 120$ telles manières.

Preuve: On note $x_1, \ldots, x_n$ nos objets à permuter.

- On peut positionner x_1 n'importe où: on a donc n choix pour sa position;
- Désormais x_2 peut être placé n'importe où, sauf à la place de x_1, on a donc $n-1$ choix pour sa position;
- x_3 a $n-2$ choix de position;
- En général: si $1 \leq k \leq n$, x_k a $n-k+1$ choix pour sa position.

Comme on multiplie les nombres de choix, le nombre de telles positions est:

$$\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)$$

On pose alors $l = n-k+1$. Ce produit est donc égal à :

$$\prod_{l=1}^{n} l = n!.$$

Propriété 4: Soit E et H deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et m. Alors il existe exactement m^n fonctions de E dans H.

Preuve: Écrivons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Les $f(x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$ définissent entièrement la fonction f, il suffit donc de compter le nombre de façons de les choisir.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on attribue un élément $y_i \in H$ à $f(x_i)$. Ainsi, on a $|H| = m$ choix pour la valeur de chaque $f(x_i)$. Le nombre de façons de choisir les $f(x_i)$ est donc:

$$m \times m \times \cdots \times m \text{ n fois } = m^n.$$

D'où le résultat.

Propriété 5: (Principe des tiroirs) Si $n+1$ éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient au moins 2 éléments.

Preuve: Pour alléger la preuve, on utilisera la notation standard suivante Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles, alors:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

On aura aussi besoin du lemme suivant: Si $A_1, \ldots, A_n$ sont finis, alors:

$$\text{Card} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

ce que le lecteur pourra prouver très aisément par récurrence. On peut désormais procéder à la preuve:

Soit $x_1, \ldots, x_{n+1}$ les $n+1$ éléments rangés dans les n ensembles $A_1, \ldots, A_n$. Supposons par l'absurde qu'aucun ensemble ne contienne 2 ou plus éléments. Ainsi, les A_i sont soit vides ou contiennent exactement un élément x_j avec $1 \leq j \leq n$.

Posons $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. En passant au cardinal:

$$\text{Card} E = n + 1 = \text{Card} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Or pour chaque i, $|A_i| \leq 1$. L'inégalité précédente entraîne aussitôt:

$$n + 1 \leq n \text{ ce qui est absurde.}$$

Ainsi, un des A_i doit contenir au moins 2 éléments.

Exemple:

Prouvons que si 7 nombres distincts sont choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, alors il en existe deux dont la somme vaut 12.

On considère les 6 ensembles $\{1, 11\}$, $\{2, 10\}$,$\{3, 9\}$,$\{4, 8\}$,$\{5, 7\}$,$\{6\}$. Par le principe des tiroirs, au moins 2 nombres que l'on a choisi sont regroupés dans l'un de ces ensembles. Or ces éléments sont distincts et l'on remarque que la somme de chacun des éléments des ensembles de cardinal 2 vaut 12, d'où le résultat.

.

Exemple:

Prenons 3 réels de $[0, 1[$. Montrez qu'il existe 2 d'entre eux, disons a et b, tels que $|a - b| < \frac{1}{2}$. Considérons les ensembles $A = [0, \frac{1}{2}[$ et $B = [\frac{1}{2}, 1[$. Par le principe des tiroirs, deux de ces réels sont regroupés dans A ou dans B, ces derniers sont donc à distance au plus (strictement) $\frac{1}{2}$ d'où le résultat.

Propriété 6: Cardinaux en vrac On note les formules suivantes, ou A et B sont deux ensembles finis:

- $|A \times B| = |A||B|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $|A \cup B| = |A| + |B|$

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors:

$$|\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|.$$

La preuve de ces formules est laissée en guise d'exercice au lecteur.
Propriété 7: Une inclusion entraîne égalité

Soit $A \subset B$ des ensembles finis. On suppose par ailleurs que $|A| = |B|$, alors $A = B$.

Preuve: On se place dans les hypothèses de cet énoncé. Comme:

$$\binom{|B|}{|A|} = \binom{|B|}{|B|} = 1$$

il n'existe qu'une seule partie de B de cardinal $|B|$. C'est le cas de B mais aussi de A par hypothèse. Comme cette partie est unique: $A = B$.

9.1.1 Exercices

Exercice 9.1. Combien d'enfants faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (Rappelons que certaines personnes naissent un 29 février.)

Exercice 9.2. Combien de sous-ensembles non vides l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 10\}$ possède-t-il ?

Exercice 9.3.

- Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul ?
- Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres distincts tous strictement supérieurs à 1 ?
- Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres distincts, le premier étant non nul ?
- Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres avec au moins 2 chiffres semblables, le premier étant non nul ?

Exercice 9.4. n personnes se rendent à un événement et doivent tous se serrer la main. Combien de fois est-ce que deux mains ont été sérrées ?

Exercice 9.5. Soit m, n et p trois entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$ et $0 \leq p \leq m$.

1) En s'intéressant à un ensemble de cardinal $m+n$, réunion disjointe d'un ensemble de cardinal m et d'un autre ensemble de cardinal n, montrez **l'identité de Vandermonde**:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

2) En déduire:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

9.2. Probabilités

La théorie des probabilités gagne de plus en plus en popularité. De par ses diverses applications et sa grande utilité pour prouver certains résultats, ce domaine devient de plus en plus important. Le Concours Général des Lycées a toujours montré un réel intérêt pour les probabilités. Aujourd'hui, il semble donc compliqué de préparer ce concours sans un réel approfondissement des probabilités. Par ailleurs, au vu du sujet qui devait tomber (mais qui n'est pas tombé) en 2023, il est impératif de dépasser le programme de Terminale en probabilités pour pouvoir traiter certains problèmes. Je propose donc ici une ébauche d'un cours de L1/MPSI en probabilités.

9.2.1 Exercices de base:

Exercice 9.1. On s'intéresse à un dé non pipé. Est-il avantageux de parier qu'au bout de 4 lancers, le dé ait affiché un 6 ? On considère maintenant deux dés. Est-il avantageux de parier qu'en 24 lancers, on ait tiré un double 6 ?

Exercice 9.2. On lance un dé non pipé. On répète n fois l'opération de manière indépendante. On note p_n la probabilité d'obtenir au moins un 6. Déterminez la limite de p_n.

Exercice 9.3. Dans un match de tennis en "best of 3", le gagnant est le joueur qui remporte 2 sets sur 3. Est-il plus avantageux de parier sur le fait que le match se termine en 2 sets ou 3 sets ?

Exercice 9.4. (Problème des anniversaires) Dans une classe de n personnes, quelle est la probabilité p_n que deux élèves aient la même date d'anniversaire

? Quelle est la condition sur n pour que $p_n \geq \frac{1}{2}$? On supposera qu'il y a 365 jours dans une année.

Exercice 9.5. Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1) Que vaut p_1 ?

2) Trouvez une relation de récurrence liant p_{n+1} et p_n.

3) En posant $u_n = p_n - \frac{1}{2}$, trouvez une expression explicite de p_n.

4) Que dire de la transmission du signal sur une très grande distance ?

Exercice 9.6. Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage?

2) Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire?

Exercice 9.7. Pour organiser une coupe, on organise un tirage au sort qui réunit n équipes de basket-ball de 1ère division et n équipes de 2ième division, de sorte que chaque équipe joue un match, et un seul.

1) Quelle est la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de 1ère division à une équipe de 2ème division.

2) Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

3) Montrez que, pour tout entier naturel non nul n:

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

4) En déduire les limites de q_n et p_n.

Exercice 9.8. On jette 3 fois un dé à 6 faces et on note a, b, c les résultats obtenus. On pose alors, pour tout réel x, $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminez les probabilités pour que Q admette une racine réelle double, admette deux racines réelle distinctes ou n'admette pas de racine réelle.

Exercice 9.9. On lance trois dés non pipés. Montrer que la probabilité d'amener un total inférieur ou égal à 10 est $\frac{1}{2}$. Gagne-t-on à jouer à un jeu où l'on gagne 1 dollar si l'on tire un total supérieur à 10 et où l'on perd 1 dollar si l'on tire un total inférieur à 10 ?

Exercice 9.10. On a devant nous 9 boîtes transparentes agencées sous la forme d'une grille 3x3 (imaginez un jeu de morpion). Dans chacune de ces boîtes se trouve une lampe qui peut être allumée ou éteinte. Jack étant un électricien du dimanche, les cables liant les interrupteurs à chaque lampe ont été mis de manière aléatoire. Ainsi, à chaque fois que Jack appuie sur un interrupteur, la lampe correspondante s'allume avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Après avoir appuyé sur les interrupteurs, certaines lampes s'allument.

Quelle est la probabilité qu'aucune des lampes allumées ne soit l'une contre l'autre horizontalement ou verticalement ?

Exercice 9.11. Que dire de deux événements indépendants et incompatibles ?

Exercice 9.12. Soit A et B deux événements.

$$\text{Comparez } \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \text{ et } \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(A \cap B).$$

9.2.2 Variables aléatoires:

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés aux espaces probabilisés. Mais force est de constater que la notion de variable aléatoire permet de traiter un certain nombre de problèmes de manière plus efficace. Voici les points importants à retenir au sujet des variables aléatoires : (dans la suite X et Y sont des variables aléatoires)

- L'espace d'état $X(\Omega)$ de X est l'ensemble des valeurs prises par X avec une probabilité non nulle.
- Si A est un ensemble, l'événement $(X \in A)$ correspond à l'ensemble:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- De même, si $x \in X(\Omega)$ alors $(X = x)$ est l'ensemble:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

- L'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$ correspond à la valeur que prend X "en moyenne". Il s'agit en fait d'une moyenne des valeurs prises par X pondérées par les probabilités. Ainsi, si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

- L'espérance est linéaire:

$$\text{Si } \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \text{ alors } \mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

- Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$
- En particulier, si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Étant donné un événement A, il sera important par la suite de noter l'existence de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ (lire indicatrice de A) qui vérifie :

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voici les lois à connaître :

Loi	Paramètres	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}(X)$
Uniforme	$n \in \mathbb{N}^*$	$\{1, \ldots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$
Bernoulli	$p \in]0, 1[$	$\{0, 1\}$	p si k=1, $1 - p$ sinon	p
Binomiale	$n \in \mathbb{N}^*, p \in]0, 1[$	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np

Il peut être utile de reconnaître de telles lois dans les exercices pour pouvoir aller plus vite.

9.2.3. Exercices sur les variables aléatoires:

Exercice 9.13. On lance deux dés non pipés, on note S la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats. Donnez la loi de S.

Exercice 9.14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Soit E_n l'événement :

"il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $X_i = 1$"

Déterminez la probabilité p_n de E_n. Quelle est sa limite ?

Exercice 9.15. Calculez l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, d'une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur

$\{1, 2, 4, \ldots, 2^n\}$.

Exercice 9.16. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$. Soit k un entier naturel. Justifiez que:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1).$$

En déduire que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k).$$

Exercice 9.17. Un ascenseur embarque, au rez-de-chaussée d'un immeuble, m personnes. Il dessert n étages. Sous les hypothèses d'indépendance des choix des personnes et d'équiprobabilité du choix de l'étage d'arrêt de chaque personne, quelle est l'espérance du nombre d'arrêts de l'ascenseur ? Dans le cas où $m = n$, trouvez la limite de $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n}$.

Exercice 9.18. On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On pose $X = \mathbf{min}(U_1, U_2)$ et $Y = \mathbf{max}(U_1, U_2)$.

1) Donnez la loi de X. En déduire $\mathbb{E}(X)$.

2) Exprimez $U_1 + U_2$ en fonction de X et Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

3) Calculez $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Les deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 9.18. On choisit $2n$ nombres dans $\{-1, 1\}$ au hasard. Avec quelle probabilité la somme des n premiers est égale à la somme des n derniers. En déduire une égalité faisant intervenir des coefficients binomiaux.

Exercice 9.19. Une urne contient n boules rouges et n boules noires. On tire toutes les $2n$ boules successivement et sans remise. On appelle X le numéro du tirage auquel la dernière boule noire a été obtenue. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 9.20. (Autour d'inégalités importantes)

1) (Inégalité de Markov) Soit $\varepsilon > 0$ et X une variable aléatoire **positive**. Montrez que :

$$\varepsilon \mathbb{1}_{(X \geq \varepsilon)} \leq X$$

En déduire l'inégalité de Markov:

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

2) (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (on ne suppose plus X positive):

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(x)}{\varepsilon^2}$$

où $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ est la variance de X.

Exercice 9.21.($\star\star\star\star$) Soit X une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance (cf exercice précédent) σ^2. Soit $a > 0$. Montrez que:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

On remarquera que pour tout réel x fixé, $(X \geq a) = (X + x \geq a + x)$ puis on s'aidera de l'inégalité de Markov.

10. Équations différentielles linéaires

10.1. Vocabulaire:

On appelle équation différentielle toute équation faisant intervenir une fonction dérivable et l'une de ses dérivées.

On dira que cette équation différentielle est d'ordre n si elle fait intervenir la dérivée n-ème d'une fonction mais ne fait pas intervenir de dérivée d'ordre supérieur.

Exemple:

- $y'+y = 1$ est une équation différentielle d'ordre 1 (l'inconnue est la fonction y)
- $y'' - 2y + y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2
- $y^{(n)} - y' = 0$ est une équation différentielle d'ordre n.

10.2. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à second membre constant:

Soit a, b et c des réels tels que $a \neq 0$. On s'intéresse à l'équation différentielle d'ordre 1 suivante:

$$ay' + by = c. \text{ (E)}$$

Nous présentons ici le schéma à suivre pour résoudre une telle équation. La résolution se fait en deux temps:

1er temps: On commence par résoudre l'équation différentielle **homogène** associée à (E). Celle-ci correspond à l'équation différentielle de base dans laquelle le membre de droite est nul. Ici, l'équation homogène est:

$$ay' + by = 0 \text{ (H)}$$

a étant non nul, cette équation se réecrit:

$$y' + \frac{b}{a}y = 0.$$

Fixons un réel x. En multipliant par $e^{\frac{b}{a}x}$, il vient:

$$y'(x)e^{\frac{b}{a}x} + \frac{b}{a}y(x)e^{\frac{b}{a}x} = 0.$$

On remarque alors que cette égalité se réecrit:

$\frac{d}{dx}(y(x)e^{\frac{b}{a}x}) = 0$ où, si f est une fonction dérivable, $\frac{d}{dx}(f)$ désigne la dérivée de f.

Cela fournit l'existence d'une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que:

$$y(x)e^{\frac{b}{a}x} = A.$$

d'où:

$$y(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x}.$$

Attention, cela ne constitue que la solution **homogène** et n'est pas la solution générale de (E). On notera, par ailleurs, qu'il n'est pas nécessaire de refaire cette démonstration à chaque fois. Il faut retenir que la solution homogène d'une telle équation différentielle a cette forme.

2ème temps: Nous recherchons à présent une solution particulière à (E) (ET NON PAS (H) !). Autrement dit, nous allons essayer de trouver une solution "de tête" à (E). Lorsque le second membre est constant, on cherche toujours une solution particulière constante. En l'occurence, $y : x \mapsto \frac{ca}{b}$ est solution de (E).

Conclusion: Un résultat que nous admettons en Terminale affirme alors que l'ensemble des solutions de (E) est:

$$\{x \mapsto Ae^{-\frac{b}{a}x} + \frac{ca}{b}, A \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions est la somme d'une solution de (H) et d'une solution particulière.
Remarque: Si $a, b \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution de (E) qui vérifie $y(a) = b$. (Exercice laissé au lecteur)

Exemple: Résolvons l'équation différentielle d'ordre 1:

$$y' + 2y = 8 \text{ (E)}$$

L'équation différentielle homogène associée à (E) est:

$$y' + 2y = 0 \text{ (H)}$$

Une solution homogène est donc : $y_H : x \mapsto Ce^{-2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

En outre, $y_p : x \mapsto 4$ est une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\{x \mapsto Ce^{-2x} + 4, C \in \mathbb{R}\}.$$

Cherchons alors l'unique solution de (E) qui vérifie $y(2) = 3$.

$$y(2) = 3 \iff Ae^{-4} + 4 = 3 \iff A = -1 - e^{-4}.$$

Ainsi, l'unique solution y de (E) vérifiant $y(2) = 3$ est :

$$x \mapsto (-1 - e^{-4})e^{-2x} + 4.$$

10.2. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à second membre variable

Lorsque le second membre de l'équation différentielle est variable, il est plus difficile de trouver une solution particulière.

Une idée générale à retenir est qu'il faut toujours chercher une solution particulière dans une forme similaire à la fonction qui est dans le membre de droite.

Exemple: On cherche à résoudre l'équation:

$$y' + 2y = x^2 - 2x + 3 \text{ (E)}$$

L'équation homogène associée à (E) est $y' + 2y = 0$ (H). Une solution homogène de (E) est donc $y_H : x \mapsto Ce^{-2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Le second membre étant polynomial de degré 2, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré. On cherche donc des réels a, b, c tels que $y_p :\mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de (E). Or :

$$\begin{aligned} y_p \text{est solution de E} &\iff y' + 2y = x^2 - 2x + 3 \\ &\iff 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre $a = \frac{1}{2}$, $b = -1 - a = -\frac{3}{2}$ et $c = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$. L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\{x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}, C \in \mathbb{R}\}$$

<u>Remarque:</u> Considérons l'équation:

$$y' + ay = Q(x)e^{\lambda x}. \text{ (E)}$$

Il existe alors une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$ où le dégré de P vaut $\deg Q$ si $a \neq -\lambda$ et vaut $\deg Q + 1$ sinon où $\deg Q$ signifie le degré de Q. Cela permet de savoir sous quelle forme chercher le polynôme. Dans notre exemple, $a = 2 \neq -\lambda$ car $\lambda = 0$.

10.3. Complément: Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients variables et à second membre nul

Nous allons nous intéresser ici à l'équation:

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ (E) où } a, b \text{ sont des fonctions continues telles que } a \text{ ne s'annule pas.}$$

Comme a ne s'annule pas, cette équation se réecrit:

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = 0.$$

On s'inspire alors de ce qui a été fait dans le cas où a et b étaient constantes; par continuité de a et b, on dispose d'une primitive A de $x \mapsto \dfrac{b(x)}{a(x)}$ (par exemple : $\displaystyle\int_0^x \frac{b(x)}{a(x)}$). Mais alors:

$$y'e^{A(x)} + \frac{b(x)}{a(x)}ye^{A(x)} = 0$$

i.e:

$$y'e^{A(x)} + yA'(x)e^{A(x)} = 0.$$

Autrement dit:

$$\frac{d}{dx}(ye^{A(x)}) = 0.$$

D'où l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que:

$$y(x) = Ce^{-A(x)}.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc:

$$\{x \mapsto Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\}.$$

Bien sûr, si le second membre n'était pas nul, il faudra ajouter une solution particulière trouvée "de tête".

Remarque: Ce résultat est hors-programme et devra être remontré à chaque fois que vous voulez l'utiliser.
Exemple: On cherche à résoudre:

$$(1 + e^x)y' + y = 0$$

Cette équation se réecrit:

$$y' + \frac{1}{1 + e^x}y = 0.$$

Cherchons une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^x}$:

$$I = \int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x}dx$$

d'où :

$$I = \int 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}dx = x - \ln(1 + e^x).$$

(Pas besoin d'ajouter la constante pour ce qui nous intéresse).

D'où l'existence de $C \in \mathbb{R}$ telle que:

$$y(x) = Ce^{x - \ln(1+e^x)} = C\frac{e^x}{1 + e^x}.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc (d'après le résultat précédent):

$$\{x \mapsto C\frac{e^x}{(1 + e^x)}, C \in \mathbb{R}\}$$

10.4. Exercices:

Exercice 10.1. Résoudre l'équation différentielle:

$$y' = 10y$$

puis trouver l'unique solution f qui vérifie $f(3) = \pi$.
Faites de même pour l'équation différentielle $y' = \dfrac{-7}{4}y$.

Exercice 10.2. Résoudre l'équation différentielle

$$z' - 4z = 1.$$

En déduire les solutions de l'équation différentielle:

$$y'' = 1 + 4y'.$$

Exercice 10.3. Soit t le temps écoulé en jours à partir d'une certaine date. On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant t. On admet que :

$$N' = aN$$

où a est un réel fixé.

1. On admet qu'à l'instant initial, il y a 10^{19} noyaux radioactifs. Exprimer $N(t)$ en fonction de a.

2. Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié. En déduire a.

3. Au bout de combien de jours le nombre de noyaux radioactifs sera-t-il inférieur à 100 ?

Exercice 10.4. Résoudre l'équation différentielle:

$$y' - 2y = xe^x.$$

Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 0$.

Exercice 10.4. (Construction du sinus hyperbolique) On s'intéresse ici à l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient:

- f est 2 fois dérivable
- $\forall x \in \mathbb{R}, (f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$
- $f'(0) = 1$.

1.

a. Montrez que f' ne s'annule pas.

b. Calculez $f(0)$.

2. Montrez que $f'' = f$.

3. On pose désormais $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a. Calculez $u(0)$ et $v(0)$.

b. Trouvez une équation différentielle pour u puis une équation différentielle pour v. En déduire u et v.

c. Montrez que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

4. Faites l'étude complète de f et de f'. f est appelée le sinus hyperbolique, noté sh et f' le cosinus hyperbolique noté ch.

Exercice 10.5. Déterminez l'ensemble des fonctions f continues sur $]0,\infty[$ qui vérifient:

$$\forall x > 0, f(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt + xf(1).$$

Exercice 10.6. ($\star\star\star$) (L'oscillateur harmonique) On s'intéresse à l'équation différentielle suivante:

$$y'' + \omega^2 y = 0. \text{ (E)}$$

On pose, pour chaque réel A, B, $f_{A,B} : x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

1. Montrez que les $f_{A,B}$ sont solutions de (E).

2. Soit f une solution de (E) telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = f(x_0) = 0$. Montrez que $f = 0$.
Indication: On pourra poser $F = \omega^2 f^2 + f'^2$.

3. Soit f et g deux solutions de (E) telles qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$ et $f'(x_0) = g'(x_0)$. Montrez que $f = g$.

4. Conclure que l'ensemble des solutions de (E) est exactement:

$$\{f_{A,B}, A, B \in \mathbb{R}\}.$$

5. En déduire l'ensemble des fonctions deux fois dérivables f qui vérifient pour tout réel x :

$$f'(x) = f(-x)$$

Exercice 10.7. Déterminez l'ensemble des fonctions dérivables f telles que pour tout réel x:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 10.8. Déterminez l'ensemble des fonctions dérivables f telles que:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Exercice 10.9.

1) Soit $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que u soit dérivable et v continue. On suppose par ailleurs :

$$\forall t \in [a,b], u'(t) \leq v(t)u(t).$$

Prouver que :

$$u(t) \leq u(a)\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$$

2) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $|f'| \leq 2|f|$. On suppose qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 0$. Que dire de f ?

Exercice 10.10. Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$.Soit $Q = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}$. Prouvez que si $P \geq 0$, alors $Q \geq 0$. On s'intéressera pour cela à la quantité $Q' - Q$.

11. Autour de la décomposition en base b

La notion de décomposition en base b est importante à connaître et peut constituer le point clé d'un sujet de concours général (cf CGL 2018). Il est crucial de connaître dès à présent les résultats clés qui permettent de traiter ces sujets pour ne pas être démuni face à un tel problème. Le théorème clé est le suivant :

11.1. Théorème de la décomposition en base b:

Théorème: Soit $b \geq 2$ un entier et $n \geq 1$ un entier. Il existe alors un unique entier $p \geq 0$ et d'uniques entiers $a_1, \ldots, a_p \in \{0, \ldots, b-1\}$ tels que :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k.$$

Cette décomposition s'appelle la décomposition en **base b** de l'entier n. Les a_i sont les chiffres de n en base b. On pourra alors noter, pour aller plus vite:

$$n = \overline{a_p a_{p-1} \ldots a_0}^b$$

Exemple: La base 10 est la base habituellement utilisée. Par exemple:

$$37 = 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = \overline{37}^{10}$$

La base 2 ou le binaire est plus utilisée en informatique. Les coefficients de la décomposition prennent ici la valeur 0 ou 1. Par exemple:

$$27 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = \overline{11011}^2$$

Prouvons alors ce théorème:

Preuve: On commence par la preuve de l'existence. Fixons $b \geq 2$. Soit alors $n \geq 1$. Notons H_n la propriété :

$$"\exists p \geq 0, \exists (a_0, \ldots, a_p) \in \{0, \ldots, b-1\}^{p+1} \mid a_p \geq 1 \text{ et } n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k".$$

Montrons cette propriété par récurrence forte :

Initialisation: On a $1 = 1 \times b^0$ d'où H_1.

Hérédité: Soit $n \geq 1$ un entier. Supposons $H_1, \ldots, H_n$ vraies. Montrons H_{n+1}. On distingue deux cas:

- Si $n+1 < b$ alors $(n+1 = (n+1)b^0$ ce qui prouve le résultat avec $p = 0$ et $a_p = n+1 \geq 1$.
- Sinon $n+1 \geq b$. On peut alors effectuer la division euclidienne de $n+1$ par b. Le théorème de la division euclidienne fournit d'uniques entiers naturels q et r tels que $0 \leq r \leq b-1$ et :

$$n + 1 = bq + r.$$

Mais alors $q = \dfrac{n+1-r}{b} \leq n$ car $b \geq 2$. Cela permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence H_q qui fournit $p \geq 0$ un entier et $a_0, \ldots, a_p \in \{0, \ldots, b-1\}$ tels que :

$$q = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k. \text{ avec } a_p \geq 1.$$

Dès lors, il vient :

$$n + 1 = \sum_{k=0}^{p} a_k b^{k+1}$$

Posons alors $l = k+1$, il vient :

$$n + 1 = r \times b^0 + \sum_{l=1}^{p+1} a_{l-1} b^l.$$

En posant $p' = p+1$, $a'_0 = r$ et pour tout entier $k \in \{1, \ldots, p'\}$, $a'_k = a_{k-1}$, il vient :

$$n + 1 = \sum_{k=0}^{p'} a'_k b^k$$

avec $a'_1, \ldots, a'_{p'} \in \{0, \ldots, b-1\}$ et $a'_{p'} \geq 1$. Ceci prouve donc, dans tous les cas, H_{n+1}.

Conclusion: D'après le principe de récurrence forte, tout entier naturel admet une décomposition en base b.

Passons à l'unicité. Supposons que $n \geq 1$ admette les deux décompositions suivantes :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k = \sum_{k=0}^{p'} a'_k b^k$$

où $p, p' \geq 1$ et les a_k et les a'_k sont dans $\{0, \ldots, b-1\}$. Quitte à compléter les a_k ou les a'_k par des 0, on peut supposer que $p = p'$. Supposons, par l'absurde, que $\{i \in \{0, \ldots, p\} \mid a_i \neq a'_i\}$ soit non vide. Cela permet de définir $l = \max\{i \in \{0, \ldots, p\} \mid a_i \neq a'_i\}$. Il vient alors :

$$(a_l - a'_l) b^l = \sum_{k=0}^{l-1} (a'_k - a_k) b^k$$

Supposons par exemple $a_l > a'_l$, l'autre cas se traitant de même. Comme pour chaque $0 \leq k \leq l-1$, $|a'_k - a_k| \leq b-1$, on a:

$$|\sum_{k=0}^{l-1} (a'_k - a_k) b^k| \leq \sum_{k=0}^{l-1} |a'_k - a_k| b^k \leq (b-1) \sum_{k=0}^{l-1} b^k = b^l - 1 < b^l$$

Autrement dit : $(a_l - a'_l) b^l < b^l$ ce qui est absurde car on a supposé $a_l > a'_l$. Ainsi $\{i \in \{0, \ldots, p\} \mid a_i \neq a'_i\}$ est vide et :

$$\forall k \in \{0, \ldots, p\}, a_k = a'_k \text{ d'où l'unicité. } \square$$

En pratique, pour trouver la décomposition en base b, on peut soit la deviner en tatônnant soit effectuer des divisions euclidiennes successives par b. En guise d'exemple :

$$\begin{aligned} 37 &= 2 \times 18 + 1 \\ &= 2 \times (2 \times 9) + 1 \\ &= 2 \times (2 \times (2 \times 4 + 1)) + 1 \\ &= 2 \times (2 \times (2^3 + 1)) + 1 \\ &= 2^5 + 2^2 + 2^0 \\ &= \overline{100101}^2 \end{aligned}$$

11.2. Exercices:

Voici quelques exercices pour se familiariser avec cette notion:

Exercice 11.1. Donnez la décomposition en base 2, 3 puis 7 du nombre 207.

Exercice 11.2. Soit $b \geq 1$ et $m \geq 1$. Quel est le nombre N_m de chiffre de m en base b ? Déterminez alors la limite lorsque m tend vers l'infini de :

$$\frac{N_m}{\ln(m)}.$$

Exercice 11.3. Soit $x \in [0, 1[$. Montrez que :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$. Il s'agit du développement décimal de x.

Exercice 11.4. (d'après Oral Centrale) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de 1 dans l'écriture de n en base 2.

1) Calculez u_{25}.

2) Montrez que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n \leq 1 + \log_2(n).$$

3) Montrez qu'il existe $\alpha \in]1, \infty[$ tel que :

$$\frac{n^\alpha (1 + \log_2(n))}{n(n+1)} \text{ converge.}$$

4) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que:

$$\frac{u_n}{n(n+1)} \leq \frac{C}{n^\alpha}$$

On admet (prouvé dans les problèmes) que la suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers une limite que l'on note $\zeta(\alpha)$.

5) En déduire que la suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k(k+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. (On pourrait déterminer la valeur de sa limite, mais on s'en passera pour l'instant).

Exercice 11.5. ($\star \star \star \star \star$) (d'après Concours Général 1990) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{H}}$ la suite de nombres entiers définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{2n} = u_n \quad u_{2n+1} = 1 - u_n$$

1. Calculer u_{1990}.
2. Déterminer le nombre d'indices n, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 0$.
3. Soit p un entier naturel et $N = (2^p - 1)^2$. Calculer u_N.

Indication: Dans tout l'exercice, on pourra s'intéresser à la somme des chiffres de la décomposition de u_n en base 2.

Exercice 11.6. ($\star\star\star\star\star$) (d'après Concours Général 1994) On définit une application f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ par $f(1) = 0$ et pour tout, élément n de $\mathbb{N}^*$:

$$f(2n) = 2f(n) + 1 \quad f(2n+1) = 2f(n)$$

Etant donné un entier strictement positif p quelconque, on pose $u_0 = p$ et, tant que u_k appartient à $\mathbb{N}^*$,

$$u_{k+1} = f\left(u_k\right)$$

1. Montrer que, pour tout choix de p, il existe un unique entier $v(p)$ tel que $u_{v(p)} = 0$.

2. a) Calculer $v(1994)$. Quel est le plus petit entier p tel que $v(p) = v(1994)$? b) Etant donné un entier N, déterminer le plus petit entier p tel que $v(p) = N$.

Problèmes

On va à présent mettre en pratique ce que l'on vient d'apprendre sur des problèmes guidés. Il est peut-être intéressant, après avoir fini un problème, de relire les questions et de se demander ce qu'il aurait été préférable de faire ou de retenir ses bonnes idées.

Problème 1: Une équation fonctionnelle $(\star\star)$

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. On s'intéresse ici à une équation fonctionnelle incontournable et parfois appelée *équation de Cauchy*. Elle nous permettra par la suite d'en déduire des solutions à d'autres équations fonctionnelles.

Soit alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonctione continue vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (E)$$

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues qui vérifient (E).

1) Trouvez les fonctions constantes satisfaisant (E).

2) Pouvez-vous trouver d'autres fonctions continues usuelles qui vérifient (E) ?

On va raisonner par analyse-synthèse. Commençons donc par l'analyse en se donnant une fonction f continue, non constante et vérifiant (E).

3) On s'intéresse d'abord à f sur $\mathbb{Z}$. Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ f(n) = nf(1)$$

4) Montrez que:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall r \in \mathbb{Q},\ \ f(nr) = nf(r)$$

En déduire :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ \ f(r) = rf(1)$$

On a maintenant une idée de ce que fait f sur les rationnels. Or, en un sens, on trouve des rationnels plus ou moins partout dans $\mathbb{R}$ ce qui va nous permettre de savoir ce que fait f de manière générale. Précisons les choses :

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \to x$$

On rappelle que si $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor$ est l'unique entier p tel que:

$$p \leq y < p+1$$

6) En déduire f. Quid de la synthèse ?

7) En déduire toutes les fonctions continues g telles que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; g(x+y) = g(x)g(y)$$

8) Sauriez-vous résoudre (E) sans supposer f continue mais en la supposant monotone ?

Remarques:

- En question 5, on a montré de manière constructive que les réels étaient bien approchés par les rationnels. On a en fait montré *la densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$. Autrement dit, tout intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ contient un rationnel. En ce sens, on trouve des rationnels aussi proche que l'on veut de tout réel.
- L'hypothèse de monotonie ou de continuité est cruciale ! Il existe en effet des solutions très compliquées de (E) si l'on ommet l'une de ces hypothèses.

Problème 2: Une ellipse ! ($\star\star$)

Dans ce problème, la partie A a pour objectif d'encadrer l'intégrale :
$J(u) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-u^2\cos^2(t)}dt$, où u est un nombre réel donné tel que $0 \leq u \leq 1$.

On ne cherchera pas à calculer $J(u)$.
Dans la partie B, on appliquera le résultat obtenu en A, pour encadrer la longueur d'une ellipse.

Partie A

1. Soit h un nombre réel tel que $0 \leq h \leq 1$.

(a) Établir que :

$$1 - \frac{h}{2} - \sqrt{1-h} = \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{\phi(h)}$$

où $\phi(h) = 1 - \frac{h}{2} + \sqrt{1-h}$.

(b) Étudiez le sens de variation de ϕ sur $[0,1]$.

(c) En déduire la double inégalité :

$$1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2} \leq \sqrt{1-h} \leq 1 - \frac{h}{2}.$$

2. a) Calculez les deux intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)dt.$$

(b) A l'aide de la question c, établir l'inégalité suivante valable pour tout $u \in [0,1]$:

$$\frac{\pi}{2}(1 - \frac{u^2}{4} - \frac{3}{16}u^4) \leq J(u) \leq \frac{\pi}{2}(1 - \frac{u^2}{4})$$

(c) En déduire la limite de $J(u)$ lorsque u tend vers 0. J est-elle continue en 0 ?

Partie B

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère l'ellipse (E) définie par la représentation paramétrique qui à tout réel $t \in [0; 2\pi]$ associe : $x(t) = a\cos(t)$ et $y(t) = b\sin(t)$, où $0 < b < a$.

1) On admet que la longueur L de cette ellipse (E) est donnée par:

$$L = \int_0^{2\pi} || \overrightarrow{V(t)} || \, dt.$$

où $\overrightarrow{V(t)}$ est le vecteur dérivé à l'instant t et $|| \overrightarrow{V(t)} ||$ sa norme. Autrement dit :

$$\overrightarrow{V(t)} = (x'(t), y'(t)).$$

(a) Soit, pour $0 \leq t \leq 2\pi$, $f(t) = \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}$ et $\theta(t) = t - \pi$. Montrez que f est paire et π-périodique.

(b) Montrez que $F \circ \theta$ est aussi une primitive de f.

(c) En déduire que $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi/2} f(t)dt$.

(d) Montrez que $L = 4aJ(e)$, où e est une constante à exprimer que l'on appelle l'excentricité de (E) et J a été définie au début du problème.

(e) Application numérique : $a = \dfrac{9}{2}$ et $b = 4$. En utilisant la question 2.b, donnez un encadrement de la longueur L de cette ellipse, d'amplitude 0.25.

2.a) Soit M la longueur du cercle de centre O et de rayon $\dfrac{a+b}{2}$. Exprimez M en fonction de a et e.

(b) En encadrant $\sqrt{1-e^2}$ grâce à l'une des inégalités montrées précédemment, montrez que :

$$|M - L| \leq \frac{a\pi e^4}{2}.$$

Problème 3: Analyse 1 ($\star\star$)

Dans ce problème, on se propose d'étudier les fonctions définies sur $]0, \infty[$ par :

$$f(t) = (\frac{\ln(t)}{t})^2 \text{ et } F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$

A. Étude de la fonction f

1.a. Étudiez le signe de $1 - \ln(t)$ où $t \in]0, \infty[$.

1.b. En déduire le sens de variation de f sur $]0, \infty[$.

2. Déterminer les limites de f en 0 et en ∞.

B. Étude de la fonction F

1. Étude au voisinage de ∞.

a. Soit $x \in [1, \infty[$. Prouvez que pour tout élément t de $[x, 2x]$:

$$\frac{\ln^2(x)}{t^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln^2(2x)}{t^2}.$$

En déduire que :

$$\frac{\ln^2(x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{\ln^2(2x)}{2x}.$$

b. Déterminez la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers ∞.

2. Étude au voisinage de 0.

a. Soit x un élément de $]0, \frac{1}{2}]$. Établir que:

$$\frac{\ln^2(2x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{\ln^2(x)}{2x}.$$

b. Déterminez la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 0.

3. Calcul de F.

a. Calculez, pour $u > 1$:

$$\int_1^u \frac{\ln^2(t)}{t^2} dt$$

b. En déduire que la fonction G définie sur $]0, \infty[$ par :

$$G(u) = -\frac{\ln^2(u)}{u} - 2\frac{\ln(u)}{u} - \frac{2}{u}.$$

est une primitive de f sur $]0, \infty[$.

c. Prouvez finalement que:

$$F(x) = G(2x) - G(x).$$

4. Variations de F.

a. A l'aide de la question 3.c, calculez la dérivée de F.

b. Montrez que $F'(x) = 0 \iff (\ln(2x))^2 = 2(\ln(x))^2$.

c. Prouvez que cette équation admet deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < 1 < x_2$. Donnez une valeur approchée de x_1 et x_2 à la précisions 10^{-6}.

d. Étudiez le signe de F'. Dressez le tableau de variations de F.

Problème 4: Analyse 2 ($\star\star$)

m étant un nombre réel, on appelle f_m l'application de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui, à x, associe :

$$f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{m}{2}\ln(x).$$

On note C_m sa courbe représentative.

A. L'objet de la partie A est l'étude de f_m.

1. Calculez $\lim\limits_{x \to \infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x)$.

2. Calculez $f'_m(x)$ et donnez suivant les valeurs de m, les différents tableaux de variation possibles.

3.a. Montrez que, par un point $M_0(x_0; y_0)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$, il passe une et une seule courbe C_m.

b. Montrez qu'il existe un point unique A appartenant à toutes les courbes C_m.

B. Dans la partie B, on considère la fonction f_4 telle que :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - 2\ln(x).$$

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit $x > 0$.

a. Calculez $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)dt$.

b. Calculez $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f_4(t)dt$.

c. Cherchez $\displaystyle\lim_{x \to 0} F(x)$ et donnez une interprétation géométrique de cette limite.

2.a. Montrez que l'équation $f_4(x) = 0$ possède deux solutions et deux seulement dont l'une x_0 appartient à $[3, 4]$. (On ne demande pas de calculer x_0 ici.)
Montrez que $x_0 = \sqrt{1 + 8\ln(x_0)}$.

b. Soit, pour tous réel $x \geq 3$, $\phi(x) = \sqrt{1 + 8\ln(x)}$.
Montrez que $\phi(x) \geq 3$ et que $0 \leq \phi'(x) \leq \dfrac{4}{9}$.

c. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \phi(u_n)$$

Montrez que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 3$.

d. Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - x_0|$. En déduire la convergence de (u_n).
Trouvez un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - x_0| < 10^{-2}$.
Calculez une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Problème 5: Une suite et des PGCD ($\star\star\star$)

Si a et b sont deux entiers, le plus grand diviseur commun de a et de b est noté $\Delta(a, b)$.
Soit U la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Calculez les 6 premiers terme de U.

2. Montrez que U vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

En déduire le plus grand diviseur commun de deux termes consécutifs de cette suite U.

3.a. Montrez que la suite U vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1.$$

Les nombres $2^n - 1$ et $2^{n+1} - 1$ sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

b. Vérifiez que, pour tout couple d'entiers naturels (n, p):

$$u_{n+p} = u_n(u_p + 1) + u_p.$$

En déduire que, pour tout couple d'entiers naturels (n, p):

$$\Delta(u_n, u_p) = \Delta(u_n, u_{n+p}).\ (1)$$

c. Soit a et b deux entiers naturels non nuls et r le reste de la division euclidienne de a par b; déduire de (1) que:

$$\Delta(u_b, u_r) = \Delta(u_a, u_b).$$

et que:

$$\Delta(u_a, u_b) = u_{\Delta(a,b)}.$$

On pourra procéder à des divisions successives.

d. Calculez alors $\Delta(u_{1982}, u_{312})$.

Problème 6: Encore de l'analyse ! $(\star\star\star\star)$

Dans toute la suite, n est un entier naturel supérieur à 2 et t un réel.

On pose, par ailleurs:

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k.$$

1. Montrez que si $t \neq -1$:

$$Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1} t^{n-1}}{1 + t}.$$

En déduire que:

$$\frac{1}{1+t} = Q_{n-2}(t) + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{1+t}.$$

En intégrant les deux membres de cette relation sur le segment $[0, x]$ avec $0 \leq x < 1$, établir la relation:

$$\ln(1+x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt. \text{ (I)}$$

où $P_{n-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$.

2.a. Soit ϕ la fonction définie sur $]0, 1]$ par:

$$\phi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \phi(x)$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 1$ est continue.

b. Montrez que pour tout $x \geq 0$: $\ln(1+x) < x$.

En déduire que pour tout $x \in [0, 1], f(x) \leq 1$.

c. Cette fonction f étant continue sur $[0, 1]$, on rappelle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ existe. Soit L sa valeur et n un entier naturel non nul. Montrez que:

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx \text{ et que } \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx = L.$$

3.a. Montrez que, quel que soit $x \in [0, 1]$:

$$\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt \leq \int_0^x t^{n-1}dt.$$

En déduire que, quel que soit $x \in [0, 1]$: $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{t+1}dt \leq \frac{1}{n}$.

En utilisant la relation (I), montrez que quel que soit $x \in]0, 1]$:

$$-\frac{1}{nx} \leq f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leq \frac{1}{nx}.$$

En déduire que :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx + \frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n}) + S_n(\frac{1}{n}) \leq S_n(1) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx - \frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n}) + S_n(\frac{1}{n}).$$

où l'on a posé:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k(-1)^{k-1}}{k^2}.\ (n \geq 2)$$

b. Démontrez que, quels que soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$:

$$\frac{x^p}{p^2} \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.$$

En déduire que:

$$\forall n \geq 2, x \in [0,1], 0 \leq S_n(x).$$

c. Montrez que, pour tout $n \geq 2$ et $x \in [0,1]$, $S_n(x) \leq x$. Déterminez enfin:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\frac{1}{n})$$

d. Déduire de ce qui précède que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(1) = \int_0^1 f(x)dx = L.$$

4. En regroupant convenablement les termes de la somme définissant $S_n(1)$, montrez que:

$$\forall n \geq 5, 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \leq S_n(1) \leq 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

En passant à la limite dans les inégalités larges, en déduire un encadrement de:

$$\int_0^1 f(t)dt.$$

Problème 2: Une équation fonctionnelle 2 ($\star\star\star$)

On se propose de rechercher les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x+y)g(x-y) = (g(x)g(y))^2.\ (E)$$

1.a. Montrez que $x \mapsto \exp(ax^2)$ est solution de (E) quel que soit le réel a.

b. Montrez que $g(0)$ ne peut prendre que 3 valeurs.

c. Si $g(0) = 0$, prouvez que g est l'application nulle.

d. S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $g(x_0) = 0$, montrez que pour tout entier naturel n:

$$g(\frac{x_0}{2^n}) = 0.$$

e. Si g vérifie (1) et si g n'est pas la fonction nulle, montrez que:

$$\text{soit } g > 0 \text{ soit } g < 0.$$

2. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et telle que $g > 0$. Soit $h = \ln \circ g$.

a. Montrez que $h(0) = 0$.

b. Trouvez une équation fonctionnelle sur h.

c. Montrez que h est paire. En déduire que g est paire.

d. Soit $a = h(1)$. Déterminez $h(2)$, $h(3)$ puis montrez par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, h(n) = an^2.$$

e. Montrez que $h(nx) = n^2 h(x)$ pour tout entier naturel n et pour tout réel x. En déduire $h(\frac{1}{p})$ pour tout entier naturel non nul p puis $h(\frac{n}{p})$ pour tout entier naturel n.

f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculez $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

g. En déduire l'ensemble des solutions continues et strictement positives de (E).

Problème 2: Autour de la dérivée n-ème du sinus cardinal $(\star\star\star)$

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Cette fonction s'appelle le sinus cardinal. On s'intéresse ici à ses dérivées successives.

On fixe $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et l'on définit :

$$u_n(x) = x^{n+1} f^{(n)}(x)$$

1) Soit $0 \leq k \leq n$ un entier. Calculer la dérivée $(n-k)$-ème de $x \mapsto \frac{1}{x}$

2) En déduire que:

$$u_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} x^k}{k!} \sin(x + k\frac{\pi}{2})$$

3) Calculer la limite quand x tend vers 0^+ de $u_n(x)$.

4) Montrer que : $u_n'(x) = x^n \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2})$

5) En déduire l'estimée suivante:

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

6) Que dire de $f^{(n)}(x)$ quand n tend vers l'infini ?

7) (IMC Day 2 P3) Prouvez que l'inégalité prouvée en question 5 est stricte.

Problème 3: Le début justifie la fin (D'après CGL 2021) ($\star\star\star\star$)

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté $\mathscr{S}$, des suites (u_n) à valeurs réelles et telles que:

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

Pour tout entier $n \geq 0$.

Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathscr{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1) Démontrer que toute suite appartenant à $\mathscr{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.

2) Soit (u_n) une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geq 2$ pour lequel $u_N \leq 1$, alors (u_n) converge vers 0.

3) Soit (u_n) une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers ∞.

Ci-dessous, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers ∞.

4) Démontrer que $0 \in E_0$.

5.a) Démontrer, pour tout entier $n \geq 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5.b) En déduire que, si x est un élément de E_0, alors l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans E_0.

6.a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2, \infty[$.

6.b) Soit (u_n) une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geq 1$ pour lequel $u_N \geq N+1$, alors (u_n) diverge vers ∞.

6.c) Démontrer que $1 \in E_\infty$

7) Démontrer que, si x est un élément de E_∞, alors l'intervalle $[x, \infty[$ est inclus dans E_∞.

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta, \infty[$ est inclus dans E_∞.

8.a) (Question n'étant pas dans le sujet du CGL) Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que:

- (a_n) est croissante
- (b_n) est décroissante
- $a_n - b_n \to 0$

Montrez que ces deux suites convergent vers une même limite.
Indication: On pourra s'intéresser à la suite $(w_n) := (a_n - b_n)$

8.b) On définit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante. Tout d'abord, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Puis, pour tout entier $n \geq 0$, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $\dfrac{a_n + b_n}{2} \in E_0$, et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ sinon.

Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont même limite.

8.c) Soit δ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n). Démontrer que l'intervalle $]-\infty, \delta]$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta, \infty[$ est inclus dans E_∞.

9) On pose, pour tout entier $l \geq 2$, $c_l = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\ldots\ln((l-1)\ln(l))\ldots))))$.
Démontrer que, pour tout entier $l \geq 2$, le nombre réel c_l appartient à E_0.

10) Démontrer que la suite (c_l) converge.

11) Démontrer que $\delta \in E_\infty$.

Remarques:

- Les deux suites considérées en question 8.a sont dites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent toujours vers la même limite d'après cette question.

- Il n'aura pas échappé au lecteur que le raisonnement utilisé en question 8.b est celui de la dichotomie que l'on retrouve plus communément en informatique. Le lecteur curieux pourra s'intéresser à la preuve du théorème des valeurs intermédiaires pour un autre exemple d'application d'un tel raisonnement.

Problème 4: Autour de l'exponentielle et de π^2 ! ($\star\star\star\star\star$)

Nous allons étudier l'exponentielle et π^2. Plus précisément, nous verrons que π^2 est irrationnel et que e^r est irrationnel dès que r est rationnel !
On se propose d'abord de démontrer quelques résultats qui nous seront utiles dans ce problème

I. Préambule

On fixe $n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}^{+*}$ et l'on pose, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et } y_n = \frac{y^n}{n!}$$

On va montrer que si y est un réel strictement positif alors $\frac{y^n}{n!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

1) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

1.a) On suppose l'existence d'un entier naturel N et de $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$$

Montrez que $u_n \to 0$.

1.b)(Théorème de d'Alembert) On ne suppose plus l'hypothèse de 1.a, mais l'on suppose que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers un réel $l \in [0,1[$. En s'aidant de la définition de la convergence, montrez que (u_n) converge vers 0.

1.c) En déduire que $y_n \to 0$.

2) Soit (u_n) une suite d'entiers tendant vers 0. En s'aidant de la définition de la convergence, montrez que (u_n) est stationnaire i.e qu'elle est constante à partir d'un certain rang. Ce résultat vous semble-t-il intuitif ?
Indication: On pourra par exemple prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$

3) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrez que f est nulle.

Les deux questions qui suivent ne sont qu'une application de ce que nous avons montré en question 1. Elles ne sont pas utiles par la suite et vous pouvez les sauter dans un premier temps.

4) Montrez par récurrence :

$$e^x = S_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

On pose alors $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$ que l'on appelle le reste intégral.

5) En utilisant la question 1, montrez que $S_n(x) \to e^x$ que l'on écrira aussi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

II. π^2 est irrationnel !

Montrer le caractère irrationnel d'un réel est rarement une tâche aisée et demande souvent d'avoir recours à des outils qui ne sautent pas aux yeux. En tous cas, cette deuxième partie du problème devrait vous en convaincre !

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et définissons une fonction polynomiale P_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel k, $P^{(k)}(0)$ est un entier.
Indication: On pourra établir une relation entre les coefficients de P_n et les $P_n^{(k)}(0)$.

2) En déduire que pour tout entier naturel k, $P_n^{(k)}(1)$ est un entier.

3) Déterminer le maximum de P_n sur $[0,1]$

Comment souvent lorsque l'on cherche à montrer le caractère irrationnel d'un réel, on va procéder par l'absurde. Supposons donc que l'on dispose d'entiers naturels non nuls a, b tels que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$

Définissons alors, pour tous réels x :

$$G_n(x) := b^n\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} P_n^{(2k)}(x)\right)$$

4) Montrez que $G_n(0)$ et $G_n(1)$ sont des entiers.

5) Après avoir justifié sa dérivabilité, montrez que la dérivée de la fonction suivante:

$$x \mapsto G_n'(x)\sin(\pi x) - \pi G_n(x)\cos(\pi x)$$

est :

$$x \mapsto \pi^2 a^n P_n(x)\sin(\pi x)$$

6) Montrez que :

$$I_n = \pi a^n \int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)dx \text{ est entier}$$

7) En déduire la limite de (I_n). Où est le problème ? Conclure.

8) A-t-on montré un résultat plus fort ou plus faible que l'irrationnalité de π ?

III. L'irrationnalité de e^r (Plus difficile).

Cette partie est un peu plus ouverte que la précédente et vous invite à vous inspirer de ce qui a été fait précédemment. Un peu d'autonomie ne fait pas de mal !

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. On dispose, par définition, de $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = \dfrac{a}{b}$.

On définit cette fois P_n de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!}$$

1) Calculez la limite quand n tend vers l'infini de :

$$\int_0^r P_n(t)e^t dt$$

2) Supposons à présent que l'on dispose de p, q deux entiers naturels non nuls tels que $\exp(r) = \dfrac{p}{q}$. Que dire de $q\displaystyle\int_0^r P_n(t)e^t dt$?

3) Conclure.

4) Existe-t-il des rationnels $r > 0$ tels que $r \neq 1$ et $\ln(r) \in \mathbb{Q}$?

<u>Remarques:</u>

- Le théorème montré en 1.b du préambule est un des différents cas du théorème de d'Alembert. Il nous a permis d'affirmer qu'en un sens la factorielle croît bien plus vite qu'une exponentielle.

- Les questions additionnelles du préambule correspondent en fait au développement en série entière de l'exponentielle. La formule utilisée pour y arriver (question 4 du préambule) est une application de la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction exponentielle.
- Le lecteur intéressé pourra adapter la question 3 du préambule au cas d'une somme de réels positifs qui serait nulle.
- On a en réalité plus d'informations sur π et e ! Ce sont en fait des nombres transcendants. Autrement dit, ces derniers ne sont racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels ce qui implique automatiquement qu'ils sont irrationnels. En revanche, cela est nettement plus difficile à établir...

Problème 5: L'intégrale de Gauss (d'après Math'x Tle S 2002)

($\star\star\star\star$)

On s'intéresse ici à une intégrale particulière appelée l'intégrale de Gauss et qui est définie par:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt := \lim_{X\to\infty}\int_0^X e^{-t^2}dt$$

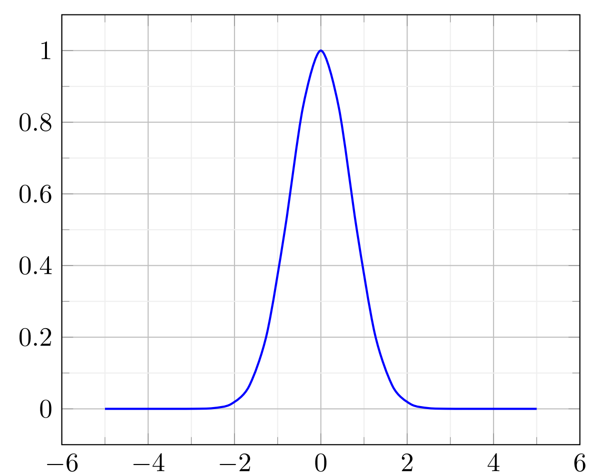


Figure 1 – La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$

On pourrait penser à chercher une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ comme on y est habitué. En effet cette fonction est continue donc admet une primitive ! Mais un résultat assez avancé de théorie de Galois nous dit que cette fonction n'a en fait pas de primitive exprimable de manière élémentaire (avec des fonctions usuelles)... Mais on va tout de même réussir à calculer cette intégrale !

I. Les intégrales de Wallis

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la n-ème intégrale de Wallis comme suite :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel.

1) Montrez que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

2) Montrez que (W_n) est décroissante et strictement positive. En déduire que (W_n) converge.

3) Montrez que :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

En déduire la limite de $(\frac{W_{n+1}}{W_n})$

4) On pose $t_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrez que t_n est constante et déterminez cette constante.

5) On pose $v_n = nW_n^2$. Déterminez la limite de (v_n), puis celle de $\sqrt{n}W_n$ et enfin celle de W_n. (On cherchera 2 méthodes différentes pour cette dernière limite).

Les deux questions qui suivent n'ont pas de lien avec le problème mais donnent des résultats intéressants sur les intégrales de Wallis. Le lecteur peut les sauter dans un premier temps.

6) Montrez les égalités suivantes :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

7) Déduire de tout ce qui précède :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{où} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} := \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

II. Quelques inégalités...

1) Montrez que pour tous réels $u \geq n, e^u \geq (1+\frac{u}{n})^n$.

2) En déduire que :

$$\forall t \in [0,\sqrt{n}], (1-\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}} \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \leq (1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n}{2}}$$

3) En déduire : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}(1-\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leq \int_0^{\sqrt{n}}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n}{2}}dt$

Soit G une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}}$ sur $[0,\sqrt{n}]$. Soit alors θ la fonction qui à $u \in [0,\frac{\pi}{4}]$ associe $\sqrt{n}\tan(u)$.

4) Exprimez $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n}{2}}dt$ grace à G.

5) Montrez que $F \circ \theta$ est dérivable et exprimez sa dérivée.

6) En déduire que :

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2}(t)dt = G(\sqrt{n}) - G(0)$$

7) Montrez que:

$$\int_0^{\sqrt{n}}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n}{2}}dt \leq \sqrt{n}W_{n-2}$$

III. Conclusion

Soit F une primitive de $t \mapsto (1-\dfrac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}$ sur $[0,\sqrt{n}]$. On pose ϕ l'application qui à $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ associe $\sqrt{n}\sin(x)$.

1) En raisonnant comme précédemment montrer que

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(u)du = F(\sqrt{n}) - F(0)$$

Qu'en déduit-on?

2) En déduire l'inégalité (remarquable) suivante :

$$\forall n \geq 2, \sqrt{n}W_{n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leq \sqrt{n}W_{n-2}$$

3) En déduire que la suite $(\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Attention, nous n'avons ni montré que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ était bien définie ni que sa valeur était $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. En effet nous avons montré que $(\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait et non pas $\displaystyle\int_0^{X} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ lorsque X tend vers l'infini. D'où la question :

4) Montrez que $\int_0^X e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ lorsque X tend vers l'infini.

Indication: On commencera par montrer que la fonction $X \mapsto \int_0^X e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Remarques:

- Le lecteur à l'oeil aiguisé aura remarqué que nous avons calculé $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ et non pas $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ comme annoncé en introduction. L'idée est que l'on peut très aisément passer de l'une à l'autre à l'aide d'un changement de variable très simple. Le changement de variable n'étant pas au programme de Terminale, on s'en passera ici. Il faut tout de même noter que cela n'importe que très peu car l'essentiel du travail a déjà été fait.
- Une question intéressante serait de savoir s'il était nécessaire de passer par les intégrales de Wallis pour en arriver là ou s'il était possible d'y arriver par des méthodes plus naturelles. Il existe une méthode bien plus simple pour calculer cette intégrale qui consiste à passer en coordonnées polaires. En revanche il n'est pas possible de faire cela rigoureusement en terminale (et même en prépa). Le lecteur intéressé pourra trouver une autre méthode dans le sujet du baccalauréat du Liban de 1978 pour la filière Terminale C. Inutile de préciser qu'il est presque inenvisageable de traiter certaines questions de ce sujet en Terminale aujourd'hui car il manquerait certains outils.

Problème 6: Autour de la série harmonique. ($\star\star$)

Ce problème s'intéresse à la somme harmonique et prouve certains résultats de diverses manières. On définit cette somme de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

La première partie sert à montrer que les sommes partielles de cette série ne sont jamais entières dès que $n \geq 2$. On s'intéressera ensuite au comportement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

I. Une suite qui n'est jamais entière.

1) Calculez H_2 et H_3. Quelle conjecture peut-on faire quant à la parité du numérateur et du dénominateur de ces rationnels ?

2) Démontrer cette conjecture par récurrence en distinguant le cas où n est pair, et celui où n est impair.

3) Conclure.

II. Un comportement asymptotique.

1) (Passage à la limite dans une inégalité large) Soit (a_n) et (b_n) deux suites de réels qui convergent respectivement vers a et b. On suppose de plus qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall n \geq N, a_n \geq b_n$$

Montrez que $a \geq b$.

2) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

3) En déduire que $H_n \to \infty$.

Précisons les choses :

4) Montrez que si k est un entier naturel non nul, alors:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$

5) En déduire:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

Retrouver que (H_n) tend vers l'infini. Précisez alors le résultat en montrant que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$$

6) Commenter ce résultat. ((H_n) diverge rapidement ? lentement ?)

<u>Remarques:</u>

- On vient de montrer que la somme harmonique (plus couramment appelée la série harmonique) tend vers l'infini à la vitesse du logarithme. Si bien qu'au voisinage de l'infini, les deux suites sont très proches l'une de l'autre.
- On vient de voir que la somme des inverses de tous les entiers divergeait vers l'infini. Il ne serait donc pas absurde de croire qu'en baissant le nombre de termes apparaissant dans cette somme, on obtienne une série

convergente. On pourrait par exemple s'intéresser à $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_k}$ où p_n est le n-ème nombre premier et n un entier naturel. Il se trouve en fait que cette somme diverge elle aussi vers l'infini quand n tend vers l'infini ! En revanche, cette divergence est bien plus lente. On montre en effet que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_k}}{\ln\ln(n)} = 1$! Autrement dit, au voisinage de l'infini, cette somme se comporte à peu près comme $\ln\ln(n)$. Cette divergence est EXTRÊMEMENT lente: $\ln(\ln(10^{5000})) \approx 9.35$ ...

- En guise de consolation (et d'exercice), le lecteur intéressé pourra montrer que $(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge quand n tend vers l'infini vers $\ln(2)$!

Problème 7: Un calcul de $\zeta(2)$ (d'après Mines MP 2023).

$(\star\star\star)$

On cherche ici à déterminer la valeur de $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ après avoir montré que cette quantité était bien définie.

I. La bonne définition de $\zeta(s)$ si $s > 1$

On veut montrer que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$ converge quand N tend vers l'infini si et seulement si $s > 1$.

1) Traiter le cas $s < 0$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Montrez que, si $s \geq 0$, alors :

- $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$
- Si $n \geq 2$ alors $\frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^s}$

3) En déduire:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} \leq 1 + \int_1^{N} \frac{dt}{t^s}$$

4) Conclure. On pourra remarquer que la suite $(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

II. Le lemme de Riemann-Lebesgue pour enfants en bas âge

1) Soit $a < b \in \mathbb{R}$, f une application définie sur $[a,b]$ dérivable et à dérivée continue. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, montrez que:

$$|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt| \leq \frac{1}{\lambda}(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|dt)$$

Indication: Procéder à une intégration par parties.

2) En déduire :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$$

(Lemme de Riemann-Lebesgue)

III. Place au calcul

1) Trouver deux réels a et b tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} (at^2 + bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$$

2) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $t \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2\sin(\frac{t}{2})}$$

Indication: On écrira $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = Re(\sum_{k=0}^{n} e^{ikt})$, puis on utilisera la technique de l'arc moitié.

3) En déduire l'existence d'une fonction *phi* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \phi(t)\sin(\frac{2n+1}{2}t)dt$$

4) On admet que ϕ est dérivable et de dérivée continue sur $[0,\pi]$. Conclure que :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque: Le lemme de Riemann-Lebesgue est en fait valable pour toute fonction f continue. L'hypothèse de dérivabilité est donc superflue, mais la preuve de ce lemme devient plus coûteuse. C'est en partie pour cela que nous avons admis le caractère dérivable de dérivée continue de ϕ mais surtout car on ne sait pas encore prouver ce fait en Terminale.

Le prochain exercice propose le calcul des $\zeta(2k)$. Évidemment, c'est plus compliqué...

Problème 8 : Calcul des $\zeta(2k)$

$(\star\star\star\star)$

On s'intéresse ici à la fameuse fonction zeta (ζ) de Riemann. Cette dernière joue un rôle crucial en théorie des nombres et est au cœur de la fameuse hypothèse de Riemann. Bien sûr, la fonction étudiée dans ce problème n'est pas tout à fait celle de l'hypothèse de Riemann qui s'intéresse à un prolongement de cette dernière. Venons-en aux faits, on définit pour tout $s > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Le lecteur pourra vérifier la bonne définition de cette fonction dans le problème précédent qui propose un calcul de $\zeta(2)$. On prendra aussi connaissance du lemme de Riemann-Lebesgue démontré dans le problème précédent qui servira ici.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit une suite de fonctions (P_n) de la manière suivante :

- $P_1(x) = -\dfrac{-x^2}{4} + \dfrac{x}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x tP_n(t)dt - x\int_0^x P_n(t)dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P_n(t)dt$

1) Montrez que les P_n sont des fonctions polynomiales.

2) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $m_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(t)dt$. Calculez m_1 et m_2.

3) Soit n un entier naturel non nul. Calculer P'_{n+1} et P''_{n+1} en fonction de P_n et m_n.

4) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que la suite $(\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)dt)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et en déduire que pour tout entier naturel non nul n:

$$\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)dt = -\frac{1}{2(k\pi)^{2n}}$$

5) Soit n un entier naturel non nul. Montrer l'existence d'une fonction polynomiale Q_n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = xQ_n(x)$$

Et établir la relation suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}} = -\pi^{2n} \int_0^1 Q_n(t) \sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t)dt$$

6) Soit f la fonction qui à $t \in]0,1]$ associe $f(t) = \dfrac{t}{\sin(\frac{\pi t}{2})}$.

6.a) Montrer que $\dfrac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1 quand t tend vers 0.

Indication: On écrira $\dfrac{\sin(t)}{t} = \dfrac{\sin(t) - \sin(0)}{t - 0}$.

6.b) En déduire que $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$ existe et déterminer sa valeur. On la note ici l.

On pose désormais $f(0) = l$. f est donc continue sur $[0,1]$. On admet que f est dérivable de dérivée continue.

7) Montrer que pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{N} 2t\cos(k\pi t) = -t + f(t)\sin((N + \frac{1}{2})\pi t)$$

8) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\zeta(2k) = m_k\pi^{2k}$.

9) Calculez $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

Remarques:

- Il n'existe aujourd'hui pas de formule pour les $\zeta(2k+1)$ qui sont bien plus durs à étudier.
- Le mathématicien français Roger Apéry a néanmoins réussi à montrer que $\zeta(3)$ (qui porte désormais le nom de constante d'Apéry) est irrationnelle. En revanche, on ne sait toujours pas si cette constante est transcendante i.e s'il n'existe pas de polynôme à coefficient rationnels dont $\zeta(3)$ est racine.

Les 3 problèmes qui suivent s'intéressent à la notion de suites définies implicitement. Il s'agit en fait de suites définies le plus souvent comme solutions à une équation ou comme des suites de nombres vérifiant une propriété particulière. L'idée est de s'aider de la définition de ces suites pour les étudier. Les études de fonctions seront très utiles dans les 2 prochains exercices. Prenez le temps de faire des tableaux de variations soignés qui vous aideront à répondre à chaque question.

Problème 9: Suite définie implicitement (1).

($\star\star$)

Dans toute la suite, n désignera un entier naturel. Soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$$

1) Justifiez brièvement le caractère dérivable de f_n. Montrez alors l'existence et l'unicité de la solution de l'équation :

$$f_n(x) = 0$$

On remarque que cette solution dépend de n. On la note donc u_n ce qui fournit une suite (u_n).

2) Combien vaut u_0 ?

3) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

4) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[\ , f_{n+1}(x) > f_n(x)$

5) En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6) En déduire que (u_n) converge vers une limite notée l.

7) Montrez que $l = 0$.
Indication: Supposez le contraire

8) Montrez que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}u_n$ converge vers une certaine limite à déterminer.

<u>Remarques:</u>

- Voici un cas typique d'une suite définie implicitement. On la définit comme solution d'une équation, et l'on parvient à en déduire de l'information. On apprend notamment que cette suite tend vers 0 à la vitesse de $\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.
- On en déduit aussitôt que pour n très grand, $f_n(\sqrt{\dfrac{2}{n}}) \approx 0$.

Problème 10 : Suite définie implicitement (2) (d'après Oral Centrale MP 2023)

($\star\star\star\star$)

L'exercice qui suit m'a été posé à l'oral de Centrale-Supélec. Il a été adapté pour être bien plus guidé et pour expliciter certaines parties qui ne sont pas évidentes en Terminale. Il y avait de plus des questions d'informatique avec le langage Python que j'ai enlevé.

On pose $f_t(x) = e^{-tx}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. On note P le point du plan de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ et C_t la courbe représentative de f_t. On considère l'ensemble des distances des points de C_t à P :

$$D_t = \{PM_t, M_t \in C_t\}$$

1) Montrez que D_t admet un minimum atteint en un unique point. On étudiera pour cela la fonction g_t qui à $x \in \mathbb{R}$ associe le carré de la distance du point $(x, f_t(x))$ au point P. On note alors d_t le minimum de D_t.

On note désormais, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n l'abscisse du point $M_n \in C_n$ tel que $PM_n = d_n$. Autrement dit, M_n a pour coordonnées $(x_n, f_n(x_n))$.

2) Montrez que $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$.

3) Étudiez la monotonie de (x_n). (On étudiera pour cela le signe de la fonction $h_n = g'_{n+1} - g'_n$). Montrez que x_n tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers l'infini.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. On définit $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

4.a) Montrez que $p_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini.

4.b) Calculez $p'_n(x)$ de deux manières différentes. En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} kx^k$. Montrez alors que cette somme converge quand n tend vers l'infini.

4.c) Montrez que la suite $(\sum_{k=0}^{n}(x_k - \frac{1}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication: On remarque d'abord que cette suite est croissante. On montre ensuite qu'elle est inférieure à une suite convergente qui est donc bornée.

4.d) Montrez que la suite $(\sum_{k=0}^{n} d_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) On pose $\Gamma = \{(x_t, y), t \in [1, \infty[\text{ et } 0 \leq y \leq f_t(x_t)\}$. On admet que Γ a une aire $\mathscr{A}$. Montrez que :

$$\mathscr{A} < \frac{1}{4}.$$

Problème 11 : Suite définie implicitement (3) (d'après CGL 2023)

$(\star\star\star)$

Ce problème du Concours Général est divisé en 3 parties. La partie 1 est au coeur des suites définies implicitement que l'on étudie actuellement et ne pose pas trop de difficultés. On étudie ensuite une classe de polynômes dits sympathiques qui sont introduits par la partie 2. La partie 3, enfin, propose d'étudier une suite de polynômes.

Partie A: Quelques exemples

1) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation :

$$x^2 + \frac{x}{n} - 1 = 0.$$

d'inconnue x.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrez que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note x_n. Exprimer x_n en fonction de n.

b) Démontrez que la suite (x_n) converge ; on note x_∞ sa limite.

c) Démontrez que x_∞ est solution de l'équation :

$$x^2 - 1 = 0.$$

2) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation :

$$\frac{y^2}{n} - y - 1 = 0.$$

d'inconnue y.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrez que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note y_n.

b) Montrez que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ diverge.

3) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation :

$$z^3 + \frac{z^2}{n} - 1 = 0.$$

d'inconnue z.

a) Soit n un entier naturel non nul.

i) Étudiez les variations de la fonction $z \mapsto z^3 + \frac{z^2}{n} - 1$ sur l'intervalle $[0, \infty[$.

ii) En déduire que cette équation admet une unique solution réelle positive; on la note z_n. Démontrez que z_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

b) Démontrez que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

c) On note z_∞ la limite de la suite $(z_n)_{n\geq 1}$. Démontrez que z_∞ est solution de l'équation :

$$z^3 - 1 = 0.$$

4) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation :

$$\frac{t^3}{n} - t^2 - 1 = 0.$$

d'inconnue t

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrez que cette équation admet une unique solution réelle; on la note t_n.

b) La suite $(t_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Partie B: Polynômes sympathiques

Dans les deux prochaines parties, on considère un entier $d \geq 1$. La fonction P est un polynôme (en réalité une fonction polynomiale) de degré au plus d s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ tels que :

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

pour tout réel x.
Soit $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus d. On dit que :

- P est initialement sympathique si $a_0 = -1$ et si $a_k \geq 0$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq d$;
- P est faussement sympathique si $a_0 = -1$ et si $a_k \leq 0$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq d$;
- P est vraiment sympathique si $a_0 = -1$ et s'il existe un entier k tel que $1 \leq k \leq d-1$ et pour lequel $a_1 \leq 0, a_2 \leq 0, \ldots, a_k \leq 0$ et $a_{k+1} > 0, a_{k+2} \geq 0, \ldots, a_d \geq 0$.

Enfin, on dit que P est sympathique s'il est initialement, faussement ou vraiment sympathique.

5) Quels sont les polynômes qui sont à la fois faussement sympathiques et initialement sympathiques ?

6) Démontrez que pour tout polynôme faussement sympathique est :

a) strictement négatif sur l'intervalle $[0, \infty[$;
b) décroissant sur l'intervalle $[0, \infty[$.

7) Soit P un polynôme vraiment sympathique et initialement sympathique.

a) Démontrez que P est strictement croissant sur $[0, \infty[$;
b) Démontrez que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution strictement

positive.

8) Soit P un polynôme vraiment sympathique mais pas initialement sympathique.

a) Démontrez qu'il existe un réel $b > 0$, un entier $l \geq 0$ et un polynôme Q vraiment sympathique tels que:

$$P'(x) = bx^l Q(x)$$

pour tout réel x.

b) Démontrez qu'il existe un réel $r > 0$ tel que le polynôme P vérifie les quatre propriétés suivantes :

- P est décroissant sur $[0, r]$;
- P est strictement croissant sur $[r, \infty[$;
- P est strictement négaitf sur l'intervalle $[0, r]$;
- l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[r, \infty[$.

9) Quels sont les polynômes sympathiques P pour lesquels l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution strictement positive ? Donnez, dans ce cas, le tableau de signes de P sur l'intervalle $[0, \infty[$.

Partie C: De la suite dans les idées

On considère désormais des polynômes vraiment sympathiques $P_1, P_2, \ldots$. Puisque ces polynômes sont de degré au plus d, on peut écrire chaque polynôme P_n sous la forme:

$$P_n : x \mapsto a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \cdots + a_{2,n}x^2 + a_{1,n}x + a_{0,n}.$$

On suppose en outre, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq d$, que la suite $(a_{k,n})_{n\geq 1}$ est convergente; on note $a_{k,\infty}$ sa limite.
On considère alors le polynôme P_∞ défini par:

$$P_\infty : x \mapsto a_{d,\infty}x^d + a_{d-1,\infty}x^{d-1} + \cdots + a_{2,\infty}x^2 + a_{1,\infty}x + a_{0,\infty}.$$

Enfin, pour tout entier $n \geq 1$, on note x_n l'unique solution strictement positive de l'équation $P_n(x) = 0$.
Ci-dessous, on étudie la convergence éventuelle de la suite (x_n).

10) Soit t un réel fixé. Démontrez que la suite $(P_n(t))_{n\geq 1}$ converge vers $P_\infty(t)$.

11) Démontrez que le polynôme P_∞ est sympathique.

12) On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est vraiment sympathique, et on note x_∞ l'unique solution strictement positive de l'équation $P_\infty(x) = 0$.

a) Soit u et v deux réels tels que $0 < u < x_\infty < v$. Démontrez qu'il existe un entier $M_{u,v}$ tel que $P_n(u) < 0 < P_n(v)$ pour tout entier $n \geq M_{u,v}$.

b) En déduire que la suite (x_n) converge vers x_∞.

13) On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est faussement sympathique. Démontrez que (x_n) diverge vers $+\infty$.

13) On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est faussement sympathique. Démontrez que $(x_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

14) Retrouvez les résultats de la partie A.

Problème 12 : Une suite d'intégrales (d'après Baccalauréat S Métropole 1995) ($\star$)

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

1.a) Soit $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Calculez la dérivée de f et en déduire u_0.

1.b) Calculez u_1.

2.a) Prouvez que (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2.b) Montrez que pour tous $x \in [0,1]$, $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$. En déduire que pour chaque $n \geq 1$, on a:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite de (u_n).

3) On pose, pour $n \geq 3$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$. Dans la suite, $n \geq 3$ est un entier naturel.

3.a) Vérifier que $u_n + u_{n-2} = I_n$. Par une intégration par parties, montrer que $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

3.b) En déduire:

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$$

3.c) Conclure que (nu_n) converge vers une limite à déterminer.

Les deux problèmes qui suivent s'intéressent à une famille particulière de polynômes.

Problème 13: Une famille de Polynômes.

$(\star\star\star\star)$

On cherche ici à étudier la suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2^k x) = Q_k(\sin^2(x)).$$

On rappelle le **théorème de rigidité des polynômes**. Soit P et Q deux fonctions polynomiales. On suppose l'existence d'un ensemble infini A tel que:

$$\forall x \in A, P(x) = Q(x)$$

Alors $P = Q$.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer Q_1 et Q_2.

2) Démontrez par récurrence sur k que Q_k existe et que :

$$Q_{k+1} = 2Q_k^2 - 1$$

3) Déterminez le degré de Q_k.

4) Soit $n \geq 2$ et $f = \prod_{k=1}^{n-1} Q_k$. Montrez que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 2^{-n}\sin(t) = \sin(2^{-n}t)\cos(2^{-n}t)f(\sin^2(2^{-n}t)).$$

On posera $y_n = 2^{-n}t$ et on raisonnera par récurrence.

5) Quel est le degré de f ? Calculer $f(0)$.

6) Prouvez que les $x_k := \sin^2(2^{-n}k\pi)$, pour $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}-1$ sont deux à deux distincts.

7) Montrez que les x_k sont racines de f.

8) Conclure que pour tout $t \in \mathbb{R}$ non multiple de $2^{n-1}\pi$:

$$\frac{2^{-n}\sin(t)}{\sin(2^{-n}t)\cos(2^{-n}t)} = \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1}\left(1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-n})}\right)$$

Problème 14: Les polynômes de Tchebychev.

$(\star\star)$

On s'intéresse ici aux polynômes de Tchebychev. Ces derniers peuvent être définis de différentes manières. On s'intéresse ici à une définition inductive. Le but de ce problème n'est pas d'aller très loin mais simplement de découvrir ces polynômes et de prouver certains résultats.

Remarque: Il a été question de ces polynômes à la fin du sujet du Concours Général de Mathématiques de 2023.

Soit (T_n) la suite de polynômes définie de la manière suivante :

- $T_0 = 1$ et $T_1 = X$
- $\forall n \geq 1, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$

I. Quelques résultats

1) Trouvez les 4 premiers polynômes de Tchebychev.

2) Soit n un entier naturel non nul. Justifiez que T_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient dominant. On calculera aussi $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

3) (Propriété fondamentale des polynômes de Tchebychev) Montrez que si n est un entier naturel et x est un réel, alors :

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

4) Après avoir rappelé le théorème de rigidité des polynômes, montrez que pour chaque entier naturel non nul n, T_n est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0$$

II. Autour des racines

1) Trouvez les racines de T_n pour chaque entier naturel n.

2) Faites de même pour T_n'. Ces racines seront notées $x_1 < \cdots < x_{n-1}$.

3) Calculez $T_n(x_1), \ldots, T_n(x_{n-1})$.

Problème 15: Wallis Jr.

$(\star\star\star)$

On s'intéresse ici à une suite d'intégrales très proche de celle de Wallis. Elle nous permettra d'établir des résultats en guise d'application. On définit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx.$$

I. Étude de la suite.

1) Montrez que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

2) Effectuez successivement les preuves des points suivants :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$
- Montrez que $I_n \to 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{2n+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
- Retrouvez que $I_n \to 0$

On pose désormais $f(n) = I_{n+4} - I_n$ pour tout entier naturel non nul n.

3) Montrez que pour tout entier naturel non nul n :

$$f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$$

4) Calculez I_2 et I_1.

II. Applications.

1) Montrez que, pour tout entier naturel non nul n:

$$\sum_{k=1}^{n} f(4k-2) = I_{4n+2} - I_2$$

2) En déduire la valeur de:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

3) Montrez que pour tout entier naturel non nul n:

$$\sum_{k=1}^{n} f(4k-3) = I_{4n+1} - I_1$$

4) En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Voici quelques extraits très formateurs de sujets de Concours Général.

Problème 16: Les Polynômes de Bernstein (d'après CGL 2018)

($\star\star$)

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0,1]$ par :

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein.

1.a) Donnez l'expression de $B_{2,0}(p), B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.

1.b) Déterminez les $B_{3,i}(p)$ pour i allant de 0 à 3.

2.a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$.

2.b) Montrez que pour tout $n \geq 1$ et pour tout i entre 1 et $n-1$:

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p).$$

3.a) En quelles valeurs $p \in [0,1]$ s'annule un polynôme de Bernstein ? On distinguera les cas selon les valeurs de n et i.

3.b) Qu'en est-il de son signe sur $[0,1]$?

4) Montrez que pour tout entier naturel n:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1$$

5) Déterminer la valeur des sommes :

$$\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) \text{ et } \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p)$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes ?

Remarque: Cette dernière question semble anodine, mais propose en fait de voir ce problème sous le bon point de vue ! Si X désigne une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p, alors :

$$\mathbb{P}(X = i) = B_{n,i}(p)$$

C'est donc sous le point de vue probabiliste que cet exercice prend tout son sens ! En effet la question 2.b n'est autre qu'un conditionnement (on conditionne par la valeur prise à l'étape n). La question 3.b devient une trivialité sous ce point de vue, de même que la question 4 ! En revanche, reconnaître $\mathbb{E}(X^2)$ à la fin peut être litigeux puisque cela suppose connue la formule de transfert qui n'est pas au programme de Terminale...

Problème 17: Les nombres pointus (d'après CGL 2020)

$(\star\star\star\star)$

Soit n un entier naturel non nul. On dit que n est pointi si n admet au plus un facteur premier ou bien si, en notant p et q les deux plus grands facteurs premiers de n, avec $p > q$, l'inégalité $p \geq 2q$ est vérifiée. Par exemple, 1 est pointu, car il n'a aucun facteur premier. De même, 25 est pointu, car il n'a qu'un seul facteur premier, et 147 est pointu, car $147 = 3 \times 7^2$ et $7 \geq 2 \times 3$. Au contraire, 105 n'est pas pointu, puisque $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $7 < 2 \times 5$.
Dans ce problème, on cherche à démontrer qu'il existe des suites arbitrairement longues d'entiers consécutifs pointus. Plus précisément, on souhaite démontrer la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que les nombres $n+1, n+2, \dots, n+m$ soient tous pointus.

I - Quelques exemples

1) Le nombre 2020 est-il pointu ?

2) Quel est le plus petit entier naturel non nul qui ne soit pas pointu ?

3) Quel est le plus petit nombre pointu possédant au moins quatre facteurs premiers distincts ?

4) Démontrez qu'il existe une infinité de nombres pointus.

5) Démontrez qu'il existe une infinité d'entiers naturels non nuls qui ne sont pas pointus.

6) Établir la liste des nombres pointus entre 1 et 20 inclus. Quelle est la longueur maximale d'une suite de nombres pointus consécutifs entre 1 et 20 ?

II - Peu de grands nombres premiers

On pose $0! = 1$, et $l! = 1 \times 2 \times \cdots \times l = l(l-1)!$ pour tout entier $l \geq 1$. Soit alors k et n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On s'intéresse à la fraction:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

que l'on note $F_{n,k}$. (En réalité $F_{n,k} = \binom{n}{k}$...)

7)

a) Calculez $F_{3,1}$ et $F_{9,4}$.
b) Démontrez que, si $k = 0$ ou $k = n$, alors $F_{n,k} = 1$.
c) Démontrez que, si $1 \leq k \leq n-1$, alors $F_{n,k} = F_{n-1,k} + F_{n-1,k-1}$.
d) En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel $k \leq n$, $F_{n,k}$ est un entier naturel non nul inférieur ou égal 2^n.

Dans cette question et dans les parties qui suivent, pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers p tels que $n+1 \leq p \leq 2n$, et on note π_n le nombre d'éléments de $\mathbb{P}_n$.

8)

a) Démontrez que, pour tout nombre premier p appartenant à $\mathbb{P}_n$, l'entier $F_{2n,n}$ est divisible par p.

b) Démontrez que, si a, b et c sont des entiers naturels non nuls tels que b et c sont premiers entre eux et divisent a, alors l'entier bc divise a lui aussi.

c) Soit d le produit de tous les éléments de $\mathbb{P}_n$. Démontrez que l'entier $F_{2n,n}$ est divisible par d.

d) En déduire que $n^{\pi_n} \leq 2^{2n}$.

III - Des ensembles à peu d'éléments

Soit b un entier naturel non nul, et $f_b :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_b(x) = \frac{(\ln(x))^b}{x} \text{ pour tout } x > 0.$$

9)

a) Soit x un nombre réel tel que $x > 1$, et soit $y = \ln(x)/b$. Démontrez que :

$$f_b(x) = \frac{b^b}{(\exp(y)/y)^b}$$

b) En déduire que $\lim_{x\to\infty} f_b(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on considérera deux entiers naturels non nuls l et n fixés, tels que $n \geq 2$.

10) On note A_l l'ensemble des entiers naturels non nuls dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à 2^l.

a) Parmi les entiers compris entre 1 et 30 inclus, lesquels appartiennent à l'ensemble A_2 ?

b) On note $p_1, p_2, \dots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à 2^l, numérotés dans l'ordre croissant. Soit alors a un élément de A_l qui soit inférieur ou égal à n.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ les entiers naturels tels que :

$$a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

Démontrez que les entiers naturels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont tous inférieurs ou égaux à $\ln(n)/\ln(2)$.

c) En déduire que A_l compte au plus :

$$(\frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1)^{2^l}.$$

éléments inférieurs ou égaux à n.

d) On pose $b = 2^l$. Démontrez que A_l compte au plus

$$\frac{2}{(\ln(2))^b} \times f_b(2n) \times n$$

éléments inférieurs ou égaux à n.

11) Soit k un entier naturel non nul. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{P}_{2^k}$ désigne l'ensemble des nombres premiers p tels que $2^k + 1 \leq p \leq 2 \times 2^k$, et que π_{2^k} est le nomnbre d'éléments de $\mathbb{P}_{2^k}$.

a) Explicitez les ensembles $\mathbb{P}_{2^1}$ et $\mathbb{P}_{2^2}$.

On note $B_{k,1}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ayant au moins un facteur premier dans l'ensemble $\mathbb{P}_{2^k}$, et on note $B_{k,2}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ayant au moins deux facteurs premiers distincts dans l'ensemble $\mathbb{P}_{2^k}$.

b) Quel est le plus petit élément de $B_{2,2}$?

c) Soit p un nombre premier. Démontrez que le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n et multiples de p est au plus de n/p.

d) Démontrez que l'ensemble $B_{k,1}$ compte au plus $n \times \pi_{2^k}/2^k$ éléments inférieurs ou égaux à n.

e) En déduire que l'ensemble $B_{k,1}$ compte au plus $2n/k$ éléments inférieurs ou égaux à n.

f) Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts. Démontrez que le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n et multiples de p_1 et p_2 et au plus de $n/(p_1 p_2)$.

g) En déduire que l'ensemble $B_{k,2}$ compte au plus $4n/k^2$ éléments inférieurs ou égaux à n.

12) Pour tout entier $k \geq 2$, on note également C_k l'ensemble $(B_{k-1,1} \cap B_{k,1}) \cup B_{k,2}$.

a) Quel est le plus petit élément de l'ensemble C_2 ?

b) Démontrez que l'ensemble C_k compte au plus :

$$\frac{4n}{k^2} + \frac{4n}{k(k-1)}$$

éléments inférieurs ou égaux à n.

13) On fixe maintenant un entier $l \geq 2$, et on note D_l l'ensemble des entiers qui appartiennent à au moins l'un des ensembles C_k tels que $k \geq l$.

a) Démontrez que tout élément de $\{1, \ldots, n\}$ appartenant à l'ensemble D_l appartient à l'un des ensembles $C_l, C_{l+1}, \ldots, C_n$.

b) Démontrez, pour tout entier $k \geq 2$, que :

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k}$$

c) En déduire que D_l compte au plus $8n/(l-1)$ éléments inférieurs ou égaux à n.

IV - Beaucoup de nombres pointus

Dans cette partie, on considère un entier naturel non nul m fixé.

14) Démontrez qu'il existe un entier $l \geq 2$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble D_l compte au plus n éléments inférieurs ou égaux à $3mn$.

Dans la suite, on considère également un tel entier l.

15) Soit a un entier naturel non nul. Démontrez que, si a n'est pas pointu, alors a appartient à A_l ou à D_l.

16) Démontrez qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que l'ensemble A_l compte au plus n éléments inférieurs ou égaux à $3mn$.

17) En déduire qu'il existe un entier naturel k inférieur ou égal à $2n$ et tel que chacun des entiers $mk+1, mk+2, \ldots, m(k+1)$ soit pointu.

18) Démontrez la propriété $\mathscr{P}$ introduite en préambule de l'énoncé.

Problème 18: Un nombre explosif (d'après CGL 2020)

$(\star\star\star\star)$

Si α est un réel strictement positif, on définit la suite (x_n) par $x_1 = \alpha$ et :

$$x_{n+1} = (1 + \frac{1}{x_n})^n \text{ pour tout eniter } n \geq 1.$$

que l'on appelle suite associée à α.

On dit que le nombre α est explosif si la suite (x_n) associée à α diverge vers l'infini. Le but est de prouver qu'il existe un unique tel nombre explosif.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f_n(x) = (1 + \frac{1}{x})^n \text{ pour tout réel } x > 0.$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$x_{n+1} = f_n(x_n).$$

Dans tout le problème, pour tout réel t, l'exponentielle de t sera notée $exp(t)$.

I - Un encadrement de $f_n(x)$.

Soit x un réel strictement positif.

1) Démontrez que $\dfrac{1}{x+1} \leq \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{x}$.

2) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a:

$$\exp(n/(x+1)) \leq f_n(x) \leq \exp(n/x).$$

II - Un critère d'explosivité.

3) Soit α un réel strictement positif et (x_n) la suite associée à α. La suite (x_n) peut-elle être majorée? Peut-elle être convergente ?

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $y_n = \dfrac{n+1}{\ln(n+2)} - 1$.

4)

a) Étudiez les variations de la fonction g définie sur $[2, \infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{\ln(x+1)} \text{ pour tout réel } x \geq 2.$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 8$, on a $y_n > e$.

c) Démontrez que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $y_n > 1$ et $y_{n-1} \leq \dfrac{n}{\ln(y_n)}$.

5) Soit α un réel strictement positif et (x_n) la suite qui lui est associée.

a) Démontrez que, pour tout entier $n \geq 8$, si $x_n \leq y_{n-1}$ alors $x_{n+1} > n+1$ et $x_{n+2} < e$.

b) En déduire que, si α est explosif, alors $x_n \geq y_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 8$.

c) Démontrez que, si α est explosif, alors $x_n \leq \dfrac{n}{\ln(y_n)}$ pour tout entier $n \geq 8$.

d) Démontrez que α est explosif si et seulement si $y_{n-1} \leq x_n \leq \dfrac{n}{\ln(y_n)}$ pour tout entier $n \geq 8$.

6) Soit α, β et γ des réels strictement positifs tels que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Démontrez que si α et γ sont explosifs alors β l'est aussi.

III - Un unique nombre explosif.

Soit r et s deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ et telles que $s(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$. On désigne par $r \circ s$ la fonction définie par :

$$r \circ s(x) = r(s(x)) \text{ pour tout réel } x > 0.$$

On pose alors $h_1 = f_1$ et :

$$h_n = f_n \circ h_{n-1} \text{ pour tout entier } n \geq 2.$$

De plus, on note $h_n(\mathbb{R}^{+*})$ l'ensemble des réels $h_n(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}^{+*}$.

On admettra enfin que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

7)

a) Explicitez l'expression de $h_2(x)$ pour tout réel $x > 0$.

b) Soit α un réel strictement positif et (x_n) sa suite associée.
Pour tout entier $n \geq 1$, exprimez x_{n+1} en fonction de h_n et α.

8)

a) Démontrez que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction h_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) A l'aide de la calculatrice et sans plus de justification, déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près des réels u et v tels que $]u, v[= h_8(\mathbb{R}^{+*})$.
Vérifiez que $u < e$ et $9 < v$.

c) Démontrez que, pour tout entier $n \geq 9$, on a $[e, n] \subset h_{n-1}(\mathbb{R}^{+*})$.

d) En déduire que, pour tout entier $n \geq 9$, on a $[y_{n-1}, n/\ln(y_n)] \subset h_{n-1}(\mathbb{R}^{+*})$.

Pour tout entier $n \geq 9$, on pose $I_n = [y_n, n/\ln(y_n)]$ et on note J_n l'ensemble des réels strictements positifs x tels que $h_{n-1}(x) \in I_n$.

9)

a) Démontrez que, pour tout entier $n \geq 9$, il existe des réels a_n et b_n tels que $J_n = [a_n, b_n]$.

b) Démontrez que pour tout entier $n \geq 9$, on a $J_{n+1} \subset J_n$.

c) En déduire que les suites a_n et b_n convergent.

Dans toute la suite, on note α et β les limites respectives de (a_n) et (b_n).
De plus, on désigne par (α_n) et (β_n) les suites respectivements associées à α et β.

10)

a) Démontrez que α et β sont explosifs.

b) Démontrez qu'un réel $x > 0$ est explosif si et seulement si $\alpha \leq x \leq \beta$.

11)

a) Montrez que, pour tout entier $n \geq 9$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$|f_n'(x)| \geq |f_n'(\frac{n}{\ln(y_n)})|.$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 9$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$|f_n'(x)| \geq \frac{y_n(\ln(y_n))^2}{n} \exp(-\frac{1+\ln(y_n)}{n+\ln(y_n} \ln(y_n))).$$

c) Démontrez que $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n \ln(n)}{n} = 1$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(y_n)}{n} = 1$.

d) En déduire qu'il existe un entier $N \geq 9$ tel que, pour tout entier $n \geq N$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$|f_n'(x)| \geq 2.$$

12) Dans cette question, on désigne par N un tel entier.

a) Déduire de 11.d) que, pour tout entier naturel $n \geq N$ et pour tous réels $x, y \in I_n$, on a :

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geq 2|x - y|.$$

b) Démontrez que si $\alpha < \beta$, alors il existe un réel strictement positif C tel que:

$$|\alpha_n - \beta_n| \geq C2^n \text{ pour tout entier } n \geq N.$$

13)

a) Démontrez qu'il n'existe qu'un seul nombre explosif.

b) A l'aide de la calculatrice et en nommant l'algorithme utilisé, donnez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Problème 19: Ensembles remarquables de fonctions (d'après CGL 2019)

$(\star\star\star)$

Comment souvent au concours général, on vous donne un très grand nombre d'informations à garder en tête. Le but est de ne pas être intimidé; avec l'expérience, vous n'aurez aucun problème à jongler avec des informations introduites par le sujet. C'est particulièrement le cas dans ce sujet:

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0, \infty[$ et à valeurs dans $[0, \infty[$.

Pour f et g dans $\mathscr{P}$, on définit la fonction $h = f \circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geq 0$:

$$h(x) = f(g(x)).$$

Si, pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a $f(x) \geq g(x)$, on note $f \geq g$.

On note u et v les fonctions de $\mathscr{P}$ définies, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par :

$$u(x) = e^x - 1 \text{ et } v(x) = \ln(x+1).$$

La fonction f est une fonction polynomiale si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geq 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$:

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sont alors appelés les coefficients de la fonction polynomiale f.

Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$, on définit les propriétés:

- **(P1)** $\mathscr{S}$ contient u et v.
- **(P2)** $\mathscr{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.
- **(P3)** Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f + g$ est dans $\mathscr{S}$
- **(P4)** Si f et g sont dans $\mathscr{S}$ alors $f \circ g$ est dans $\mathscr{S}$.
- **(P5)** Si f et g sont dans $\mathscr{S}$ avec $f \geq g$, alors $f - g$ est dans $\mathscr{S}$.
- **(P6)** Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathscr{S}$.

1) Soit $\mathscr{F}$ un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie toutes les propriétés de **(P1)** à **(P2)**.

a) Soit l la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $l(x) = x$. Démontrez que $l \in \mathscr{F}$.

b) Déterminez toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathscr{F}$.

c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrez que $p \in \mathscr{F}$.

d) Une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ est-elle toujours dans $\mathscr{F}$?

2) Dans cette question, on suppose que $\mathscr{U}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)** jusqu'à **(P5)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P6)**. La réponse donnée à la question d) est-elle encore valable ?

3) Dans cette question, on suppose que $\mathscr{V}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P5)**, **,** mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P3)**.

a) Soit d un entier naturel non nul. On note Q_d la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par

$$Q_d(x) = (x+1)^d - 1.$$

Montrez que $Q_d \in \mathscr{V}$.

b) Soit d un entier naturel non nul. Démontrez qu'il existe des nombres entiers $a_1, \ldots, a_d$ supérieurs ou égaux à 1 tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$:

$$(x+1)^d = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + 1.$$

c) Soit f une fonction polynomiale telle que $f(0) = 0$. Montrez qu'il existe un nombre réel $c \geq 0$ et un entier naturel non nul d tels que la fonction qui, à tout nombre réel $x \geq 0$, associe :

$$c(x + x^2 + \cdots + x^d) - f(x)$$

est une fonction polynomiale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

d) En déduire que, si f est une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ telle que $f(0) = 0$, alors f est dans $\mathscr{V}$.

e) Soit f une fonction dans $\mathscr{P}$.

- On dit que f est segmentée si elle vérifie la propriété:
  pour tout nombre réel $a \geq 0$, il existe un nombre réel $b \geq 0$ tel que, pour tout x vérifiant $0 \leq x \leq a$,

  $$0 \leq f(x) \leq b.$$

- On dit que f est bornée si elle vérifie la propriété :
  il existe un nombre réel $b \geq 0$ tel que pour tout nombre réel $x \geq 0$,

  $$0 \leq f(x) \leq b.$$

On note alors $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions segmentées et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions segmentées qui sont nulles en 0 ou bornées.

i. Soit f une fonction dans $\mathscr{P}$. On suppose f bornée. Démontrez que f est segmentée. La réciproque est-elle vraie ?

ii. Montrez que $\mathscr{A}$ satisfait les propriétés **(P1)** à **(P6)**.

iii. Montrez que $\mathscr{B}$ satisfait les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)** mais ne satisfait pas **(P3)**.

f) Une fonction polynomiale dans $\mathscr{P}$ est-elle nécessairement dans $\mathscr{V}$?

Problème 20: Moyennes prévisionnelles (d'après CGL 2015)

$(\star\star\star\star\star)$

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n) = (u_1, u_2, \dots)$ à valeurs réelles indexées par des entiers naturels non nuls. On dit que la suite (u_n) est de type $\mathcal{M}$ si, pour tout entier naturel non nul n, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n}$$

1) Soit (u_n) une suite de type $\mathcal{M}$ et C un réel. Que dire de la suite $(u_n - C)$?

2) Montrez que toute suite croissante de type $\mathcal{M}$ est constante.

3) Soit (u_n) une suite de type $\mathcal{M}$. On suppose qu'il existe des réels a,b,c tels que $u_n = an^2+bn+c$ pour tout entier naturel non nul n. Montrez que $a = b = 0$.

4) L'objectif de cette question 4 est de montrer que toute suite minorée ou majorée de type $\mathcal{M}$ est constante.
Dans les questions a) et b) on suppose que (u_n) est une suite de type $\mathcal{M}$ à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit p un entier tel que $p > r$. Montrez qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q < p \leq q' \leq 2q$ et $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$. En déduire que $u_p \leq 3u_r$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrez que $u_p \leq 3u_r$.
Dans les questions c) et d) on suppose que (u_n) est une suite minorée de type $\mathcal{M}$.

c) Soit D un réel strictement positif et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrez que si $u_p - D$ n'est pas un minorant de la suite (u_n), alors $u_p - \dfrac{3}{2}D$ n'est pas un minorant de cette suite non plus.

d) En déduire que la suite (u_n) est constante.

e) Conclure.

5) Existe-t-il une suite non constante de type $\mathcal{M}$?

Les questions qui suivent n'étaient pas dans le sujet initial.

6) Que dire d'une suite (u_n) de type $\mathcal{M}$ qui converge ?

7) (En guise de consolation, le théorème de Cesàro en réalité dû à Cauchy) Soit (u_n) une suite quelconque de réels. On suppose que $u_n \to l \in \mathbb{R}$. Montrez que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to l.$$

Problème 21: Que la force soit avec f ! (d'après CGL 2021)

$(\star\star\star\star)$

Un problème assez calculatoire mais vraiment magnifique ! Ce sujet devrait vous aider à jongler entre les différentes notions introduites par les différents sujets.

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul, I un intervalle ouvert de $]0,\infty[$ et f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives.
On dit que la fonction f est "k-forte" si, pour tous les réels x et y appartenant à I:

$$(y^k f(y) - x^k f(x))(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}) \geq 0.$$

On dit que f est "k-faible" si, pour tous les réels x et y appartenant à I:

$$(y^k f(y) - x^k f(x))(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}) \leq 0.$$

I - Quelques exemples et propriétés

1) Démontrez que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $]0,\infty[$ par $f_1(x) = x^2$ est 1-forte et 3-faible.

2) Démontrez que la fonction f_2 définie sur l'intervalle $]0,1[$ par $f_2(x) = \exp(x)$ est 1-faible mais pas 1-forte.

3) Démontrez que la fonction f_3 définie sur l'intervalle $]1,\infty[$ par $f_3(x) = \exp(x)$ est 1-forte mais pas 1-faible.

4) Démontrez que la fonction f_4 définie sur l'intervalle $]0,\infty[$ par $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$ est k-faible pour tout entier $k \geq 1$.

5) Existe-t-il une fonction définie sur l'intervalle $]0,\infty[$ qui soit k-forte pour tout entier $k \geq 1$?

II - Quelques critères de force et de faiblesse

6) Démontrez que f est k-forte si et seulement si :

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \leq \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}.$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si:

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geq \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}.$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

7) Démontrez que f est k-forte si et seulement si :

$$\frac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)} \leq \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à Î, et que f est k-faible si et seulement si :

$$\frac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)} \geq \frac{\max(f(x), f(y))}{\max(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

8) On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par :

$$g_k(x) = x^k f(x) \text{ et } h_k(x) = \frac{f(x)}{x^k}.$$

a) Démontrez que, si g_k et h_k sont monotones, alors f est k-forte ou k-faible.

b) Démontrez que, si f est k-faible, alors g_k et h_k sont monotones.

c) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0,\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 2; \\ 4x & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

Démontrez que f est 1-forte mais que les fonctions g_1 et h_1 ne sont pas monotones.

9) On suppose dans cette question que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

a) Démontrez que, si $|f'(x)| \geq k\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-forte.

b) Démontrez que, si $|f'(x)| \leq k\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-faible.

c) Démontrez que les réciproques aux questions 9)a) et 9)b) sont vraies.

III - Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est forte s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que f soit k-forte, et que f est faible s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que f soit k-faible.

10) Démontrez que, si f est faible, la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est faible.

11) Démontrez que, si deux fonctions f et g définies sur I sont faibles, les fonctions $f + g$,$f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ sont faibles.

12) Démontrez à l'aide de contre-exemples que, si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ ne sont pas nécessairement fortes.

13) Soit f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives, et g une fonction définie sur $]0, \infty[$.

a) Démontrez que, si f et g sont faibles, la fonction $g \circ f$ est faible.

b) Démontrez que, si f et g sont fortes, la fonction $g \circ f$ est forte.

IV - Application à la démonstration d'inégalités

14) Soit a,b et c trois réels strictement positifs, et n un entier naturel non nul. Démontrez que :

$$(\frac{a+c}{b+c})^n + (\frac{b+c}{a+c})^n \leq (\frac{a}{b})^n + (\frac{b}{a})^n.$$

15) Dans cette question, on pourra utiliser le fait que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ de dérivées respectivement $\cos' = -\sin$ et $\sin' = cos$.

La fonction tan est définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Démontrez que:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}.$$

Problème 22: Étude de suites (d'après Oral de l'École Polytechnique)

$(\star\star\star)$

L'exercice qui suit est une adaptation d'un exercice posé à l'oral de l'École Polytechnique. Voici l'énoncé tel qu'il a été posé :

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction 1-lipschitzienne (vous étudierez cela dans le supérieur, cela signifie que $\forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$). Soit (x_n) une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$. Montrez que (x_n) converge.

On ne s'intéressera ici qu'à des cas particuliers naturellement plus faciles à traiter.

Soit r un réel strictement positif et $\theta \in]0, \pi[$. On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

- $z_0 = re^{i\theta}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$

0) Montrez que si a et b sont des nombres complexes, alors:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Autrement dit, le module est 1-lipschitzien.

On pose désormais $U_n = |z_n|$.

1) Démontrez que (U_n) décroît et en déduire sa convergence.

2.a) Montrez que pour tout réel x, $e^{ix} + 1 = 2e^{i\frac{x}{2}} \cos(\frac{x}{2})$.

2.b) Démontrez que pour tout entier naturel n:

$$z_n = \frac{r\sin(\theta)}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$$

3) En déduire $Re(z_n)$, $Im(z_n)$ et leurs limites respectives.

4) Déterminez $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

5) (Un autre cas particulier) Montrez que la fonction sin est 1-lipschitzienne. Étudiez la convergence de la suite (x_n) où $x_0 \in \mathbb{R}$ et:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n + \sin(x_n)}{2}$$

Problème 23: Une intégrale à paramètres $(\star\star\star\star\star)$

La théorie des intégrales à paramètres sera vue plus tard dans votre cursus et permettra d'étudier certaines fonctions définies par des intégrales plus facilement. On s'intéresse donc ici à l'intégrale à paramètre suivante :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + t + x}$$

1) Montrez que F est décroissante et déterminez sa limite en l'infini.

2) Déterminez la limite en l'infini de $xF(x)$.

3) Pour tout réels strictement positifs a,x, on pose $F_a(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{at + x}$.

3.a) Calculer $F_a(x)$.

3.b) Montrez que pour tout $x > 0$, $F_2(x) \leq F(x) \leq F_1(x)$.

3.c) Montrez que $\dfrac{F(x)}{-\ln(x)} \to 1$ quand x tend vers 0 et <u>en déduire</u> la limite de $F(x)$ quand x tend vers 0.

On pose désormais, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t^3 + t)^n dt$

4) (Assez ouvert) Déterminez une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi simple que possible telle que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{a_n} = 1.$$

5.a) Soit $u \geq 0$ et n un entier naturel non nul. Montrez que :

$$\left|\frac{1}{1+u} - \sum_{k=0}^{n-1}(-u)^k\right| \leq u^n.$$

5.b) Soit $t \in [0,1]$ et n un entier naturel non nul. Montrez que :

$$\left|\frac{1}{t^3+t+x} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(t^3+t)^k}{x^{k+1}}\right| \leq \frac{2^n}{x^{n+1}}.$$

5.c) En déduire l'existence d'une suite (a_k) de réels et d'une fonction ε telle que pour tout entier naturel n non nul:

$$\forall x > 0, F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}$$

où $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Problème 24: Stabilité géométrique (d'après CGL 2014)

$(\star\star\star)$

Dans tout le problème, ε et q sont des réels strictement positifs.
On considère une suite (x_n) de réels tels que $x_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n:

$$0 \leq x_{n+1} - qx_n \leq \varepsilon.$$

1) Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = x_{n+1} - qx_n$.
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a:

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1}b_0 + q^{n-2}b_1 + \cdots + qb_{n-2} + b_{n-1}.$$

2) Dans cette question, on suppose que $0 < q < 1$.

a) Montrez qu'il existe une suite géométrique (y_n) telle que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-q}.$$

b) Montrez qu'il existe en fait une infinité de telles suites géométriques (y_n).

3) Dans cette question, on suppose que $q > 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{b_0}{q} + \frac{b_1}{q^2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{q^n}$.

a) Montrez que la suite (u_n) converge. On note s sa limite.

b) Pour tout $n \geq 1$, montrez que : $0 \leq s - u_n \leq \frac{\varepsilon}{q^n(q-1)}$

c) Montrez qu'il existe une unique suite géométrique (y_n) telle que, pour tout entier naturel n:

$$|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{q-1}$$

Problème 25: Une étude asymptotique d'une suite d'intégrales

$(\star\star\star\star\star)$

Soit n un entier naturel plus grand que 3. On souhaite étudier le comportement asymptotique de :

$$I_n = \int_0^n \frac{dx}{1 + x + \frac{e^{x^2}}{n}}.$$

0) Soit f une fonction positive et définie sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$. Soit $c \leq d$ tels que $[c, d] \subset [a, b]$ (lire $[c, d]$ est inclus dans $[a, b]$, autrement dit tout élément de $[c, d]$ est élément de $[a, b]$). Montrez que :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_c^d f(t)dt$$

1) Calculez :

$$\int_0^{\sqrt{\ln(n)}} \frac{dx}{2 + x}$$

2) En déduire que $I_n \geq \ln(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(n)})$.

3) Quelle est la limite de I_n.

4) Soit $J_n = \int_{2\sqrt{\ln(n)}}^n \frac{dx}{1 + x + \frac{e^{x^2}}{n}}$. Prouver que pour n assez grand:

$$J_n \leq \frac{1}{1 + 2\sqrt{\ln(n)}} \int_{2\sqrt{\ln(n)}}^n \frac{dx}{1 + e^{\frac{x^2}{2}}}$$

5) En minorant $e^{\frac{x^2}{2}}$, et en admettant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Montrez que :

$$\int_0^n \frac{dx}{1+e^{x^2}} \leq \frac{\pi}{2}$$

6) En déduire qu'il existe une constante strictement positive C telle que $J_n \leq \dfrac{C}{\sqrt{\ln(n)}}$

7) Soit $K_n = \displaystyle\int_{\sqrt{\ln(n)}}^{2\sqrt{\ln(n)}} \frac{dx}{1+x+\frac{e^{x^2}}{n}}$. Montrez que (K_n) est bornée.

8) Soit $L_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln(n)}} \frac{dx}{1+x+\frac{e^{x^2}}{n}}$. Montrez que

$$L_n \leq \ln(1+\sqrt{\ln(n)}.$$

9) En déduire que $I_n \sim \dfrac{1}{2}\ln(\ln(n))$ i.e :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{2}\ln(\ln(n))} = 1$$

10) Montrez que $I_n - \dfrac{1}{2}\ln(\ln(n)) \to 0$.

Remarque: On pourrait penser que la question 10 est une conséquence immédiate et générale de la question 9, mais il n'en est rien. En effet $\dfrac{n+1}{n} \to 1$ pourtant $(n+1) - n = 1$... Ce problème montre aussi à quel point l'étude asymptotique de suites d'intégrales peuvent être compliquées, surtout sans certains outils du supérieur...

Les deux prochains problèmes sont dédiés aux probabilités, un chapitre bien souvent délaissé à tort en Terminale. Le premier permet une bonne compréhension des variables aléatoires et des racines de l'unité. Le second est très complet et très formateur.

Problème 26: Allons dans $\mathbb{C}$ (d'après CGL 2016) $(\star\star\star)$

Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{2\pi i/3}$.
La probabilité d'un évènement A est notée $\mathbb{P}(A)$.

1)

a) Vérifiez que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

b) Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes $1, j, j^2$?

c) Montrez que si a, b, c sont des nombres réels, alors $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si $a = b = c$.

On lance un dé équilibré (six faces numérotées de 1 à 6). On note F la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et on note Z la variable aléatoire j^F.

2) Montrez que Z est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$ et que $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = j) = \mathbb{P}(Z = j^2) = \dfrac{1}{3}$.

On considère un entier $n \geq 1$ et on lance le dé n fois (lancers indépendants). On note F_k le résultat du k-ième lancer et $Z_k = j^{F_k}$. On note $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ et $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On note U_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $Z_k = 1$; on note V_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $Z_k = j$ et W_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $Z_{k=j^2}$.

3)

a) Déterminez $U_n + V_n + W_n$.

b) Montrez que $S_n = U_n + jV_n + j^2 W_n$.

c) Montrez que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.

d) En déduire que si n n'est pas multiple de 3, alors $p_n = 0$.

4) On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $n = 3m$.

a) Montrez que la variable aléatoire u_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) En déduire que $\mathbb{P}(U_n = m) = \dbinom{3m}{m} \dfrac{2^{2m}}{3^{3m}}$.

On note $P_{U_n=m}(V_n = m)$ la probabilité conditionnelle de $V_n = m$ sachant $U_n = m$.

c) Montrez que $P_{U_n=m}(V_n = m) = 2^{-2m} \dbinom{2m}{m}$.

d) En déduire que $p_{3m} = 3^{-3m}\binom{3m}{m}\binom{2m}{m}$.

La question précédente, combinée à une expression classique des coefficients binomiaux, entraîne pour m entier naturel non nul la relation suivante, qu'on ne demande pas de démontrer:

$$\frac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \frac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}.$$

5) Pour tout entier $m \geq 1$, montrez que $\frac{m}{m+1} \leq \frac{p_{3m+3}}{p_{3m}}$ et en déduire que $p_{3m} \geq \frac{2}{9m}$.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $S_k = 0$.

6)

a) Déterminez des variables de Bernoulli Y_k, avec $1 \leq k \leq n$, telles que $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

b) On note $\mathbb{E}(X_n)$ l'espérance de X_n (de même pour les Y_i).
En admettant que $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i)$, montrez que :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$.

Soit q_n la probabilité que l'un des S_k soit nul pour $1 \leq k \leq n$, c'est-à-dire $q_n = \mathbb{P}(X_n > 0)$.
L'objectif de la question suivante est de montrer que la suite (q_n) converge vers 1.

7)

a) Montrez que la suite (q_n) converge vers un réel q et que $q_n \leq q \leq 1$ pour tout n.

b) Pour r, n entiers naturels non nuls, montrez que $\mathbb{P}(X_n \geq r) \leq q^r$.

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, que $\mathbb{E}(X_n) \leq q + q^2 + \cdots + q^n$.

d) Conclure.

Problème 27: La loi du milieu (d'après CGL 2021)

($\star\star\star\star\star$)

Ce sujet est absolument magnifique ! Le seul reproche que l'on pourrait lui faire est qu'il est délirant de s'attendre à ce qu'un élève de Terminale n'ayant pas bénéficé d'une longue préparation puisse le traiter surtout après le premier problème du sujet, lui aussi demandant des notions avancées. Toujours est-il que ce sujet est très formateur et très beau !

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \ldots, 2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- On tire trois boules simultanément ;
- Si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b;
- On recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $\mathbb{P}(D_n = k)$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

I - Étude des petits cas

1) Déterminer la loi de D_1.

2) Déterminer la loi de la variable D_2.

II - Valeurs extrêmes et symétrie

3) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(D_n = 0)$.

4) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(D_n = 1)$ en fonction de n.

5) Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq 2n$. Pourquoi a-t-on $\mathbb{P}(D_n = i) = \mathbb{P}(D_n = 2n - i)$?

6) Calculez l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.

III - Comportement limite

Dans cette partie, on souhaite étudier la loi de D_n lorsque n tend vers l'infini. Afin de faciliter cette étude, on démontre tout d'abord un résultat préliminaire.

7) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par :

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}.$$

pour tout $n \geq 1$. Démontrez que $u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \geq 0$.

Il est maintenant temps d'étudier la loi de D_n elle-même.

8) Déterminez, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2n$, la probabilité p_j que la boule de numéro j soit éliminée lors de la première sélection.

9) Démontrez que, si $n \geq 3$, alors $p_j \geq \dfrac{1}{2n}$ pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2n$.

10) On note M_n la plus grande des probabilités $\mathbb{P}(D_n = j)$ lorsque $0 \leq j \leq 2n$. Démontrez que M_n tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.

IV - Résultat le plus probable

On rappelle que, pour deux événements A et B, on note $A \setminus B$ l'évènement selon lequel A est réalisé, mais pas B. En outre, si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On souhaite ici démontrer, pour tout entier $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(D_n = n) = M_n$! Dans ce but, on va démontrer la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a $\mathbb{P}(D_n = k) \leq \mathbb{P}(D_n = k+1)$.

11) Démontrez que, si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathbb{P}(D_n = n) = M_n$.

12) Démontrez $\mathscr{P}_1$.

On suppose maintenant que l'on dispose d'un entier $n \geq 2$ tel que $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie et d'un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$.

13) Pour tout entier l compris entre 0 et $2n$, distinct de k et de $k+1$, on note X_l l'événement selon lequel les trois boules de numéros k, $k+1$ et l sont choisies dès la première sélection.

a) Pourquoi si $l > k+1$, a-t-on $\mathbb{P}_{X_l}(D_n = k) = 0$ et $P_{X_l}(D_n = k+1) = P(D_n = k)$

b) Donnez des résultats analogues sur $\mathbb{P}_{X_l}(D_n = k)$ et $P_{X_l}(D_n = k+1)$ lorsque $l < k$.

c) On note maintenant X l'événement selon lequel les deux boules de numéros k et $k+1$ sont choisies dès la première sélection. Démontrez que $\mathbb{P}_X(D_n = k) \leq \mathbb{P}_X(D_n = k+1)$.

14) Soit Y l'événement selon lequel l'une des bboules de numéros k et $k+1$ est éliminée lors de la première sélection.

a) Démontrez que $\mathbb{P}_{Y \setminus X}(D_n = k) = \mathbb{P}_{Y \setminus X}(D_n = k+1)$.

b) En déduire que $\mathbb{P}_Y(D_n = k) \leq \mathbb{P}_Y(D_n = k+1)$.

15) Soit a, b et c les numéros des trois boules choisies lors de la première sélection, avec $a < b < c$.

a) Soit G l'événement selon lequel $c < k$. Démontrez que $\mathbb{P}_G(D_n = k) \leq \mathbb{P}_G(D_n = k+1)$.

b) Soit H l'événement selon lequel $a < k$ et $k+1 < c$. Démontrez que $\mathbb{P}_H(D_n = k) \leq \mathbb{P}_H(D_n = k+1)$.

c) Soit I l'événement selon lequel $k+1 < a$. Démontrez que, si $k \leq n-2$ alors :

$$\mathbb{P}_I(D_n = k) \leq \mathbb{P}_I(D_n = k+1).$$

16) Démontrez que, si $k \leq n-2$, alors $\mathbb{P}(D_n = k) \leq \mathbb{P}(D_n = k+1)$.

17) Démontrez $\mathscr{P}$.

Voici une illustration de ce magnifique résultat pour $n = 50$. On répète ici 3000 fois cette expérience à l'aide d'un programme Python et on compte combien de fois on trouve $D_n = n$. On remarque que le plus souvent, $D_n = n$ comme prévu par la théorie !

Problème 28: Analyse (d'après CGL 2009) $(\star\star\star\star\star)$

Le but de l'exercice est la recherche de fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\dfrac{1 - f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a.

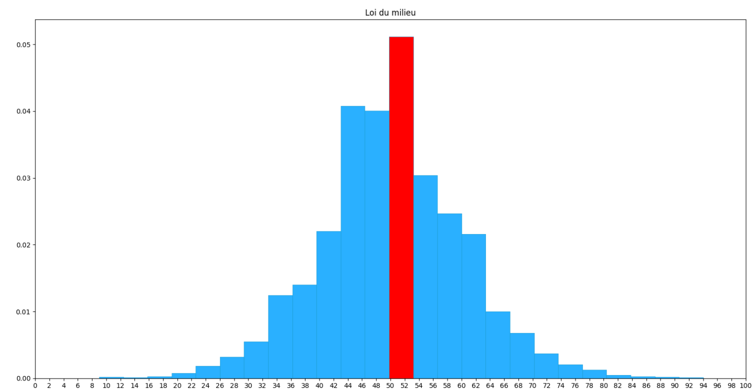


Figure 2: Loi du milieu

On rappelle que tout x de $[-1, 1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

1)

a) Vérifier que $\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$.

b) Montrez que, pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, l'on a les inégalités :

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \text{ et } \cos(\theta) \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}.$$

2) Soit f une fonction solution du problème. On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n, $f(\frac{x}{2^n}) = \cos(\theta_n)$, avec $\theta_n \in [0, \pi]$.

a) Montrez que f est continue en 0 et que $\lim_{n \to \infty} \theta_n = 0$.

b) Vérifiez l'existence d'un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

c) Établir que a est positif et que $f(x) = \cos(x\sqrt{2a})$.

Problème 29: Exercice (D'après CGL 1989) $(\star\star\star)$

1. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et k un entier naturel tel que $k \geq 2$.

(a) Posons $\lambda_k = \dfrac{(k-1)^{\frac{1}{k}}}{a^{\frac{1}{k}}}$. Comparez $\lambda_k a$ et $a^{1-\frac{1}{k}}$.

(b) Étudiez les variations de la fonction f_k définie pour tout λ réel strictement positif par :

$$f_k(\lambda) = \lambda a + \frac{1}{\lambda^{k-1}}.$$

En déduire que :

$$\forall \lambda > 0, a^{1-\frac{1}{k}} \leq \lambda a + \frac{1}{\lambda^{k-1}}.$$

(c) L'inégalité ci-dessus démontrée pour $k \geq 2$ est-elle également valide pour $k = 1$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Posons $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $T = \sum_{k=1}^{n} a_k^{1-\frac{1}{k}}$.

(a) Soit $\lambda > 0$. Montrez que :

$$T < \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

(b) En déduire une inégalité (indépendante de λ) entre $\sqrt{S}$ et $\sqrt{T}$.

Problème 30: Une équation différentielle $(\star\star\star)$

On considère l'équation différentielle (E) suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' + y = \cos(\cos(t))$$

1) Résoudre $y' + y = 1$. Quelle en est l'unique solution bornée ?

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et périodique de période $\alpha > 0$. Montrez que $f' + f$ est α-périodique. Que dire de la réciproque ?

3) Soit $g : t \mapsto \cos(\cos(t))$. Démontrez que g est π-périodique. Quel est l'ensemble des périodes de g ? Les primitives de g sont-elles périodiques ?

4) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution bornée de E. Soit $z : x \mapsto y(x+\pi) - y(x)$. Trouvez une équation différentielle satisfaite par z. Montrez que z est bornée puis que y est π-périodique.

5) Prouvez qu'il existe un réel C tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (C + \int_0^x \cos(\cos(t))e^t dt)e^{-x}.$$

6) En déduire que :

$$C = \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \int_0^\pi \cos(\cos(t))e^t dt.$$

7) En déduire que E admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

8) Montrez que cette solution n'est pas positive.

Problème 31: Plus d'une chance sur deux pour tout le monde (d'après CGL 2019)

$(\star\star\star\star\star)$

I - Des urnes et des dés

1) Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes A,B et C qui contiennent chacune quatre jetons indiscernables au toucher. Les jetons de A portent les numéros 12,10,3 et 1, ceux de B portent les numéros 9,8,7 et 2, et ceux de C portent les numéros 11,6,5 et 4.
On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A,B et C.

Montrez que $\mathbb{P}(X_A > X_B) = \dfrac{9}{16}$ et que $\mathbb{P}(X_B > X_C) = \dfrac{9}{16}$. Que vaut $\mathbb{P}(X_C > X_A)$?

2) Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois dés cubiques et équilibrés D_1, D_2 et D_3. Les faces de D_1 portent les numéros $6, 3, 3, 3, 3, 3$ celles de D_2 portent les numéros $5, 5, 5, 2, 2, 2$ et celles de D_3 portent les numéros $4, 4, 4, 4, 4, 1$.

a) On lance indépendamment cahcun de ces trois dés et on note respectivement X_1, X_2 et X_3 les numéros indiqués par la face supérieure des dés D_1, D_2 et D_3.

Calculez les trois probabilités $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$, $\mathbb{P}(X_2 > X_3)$ et $\mathbb{P}(X_3 > X_1)$.

b) Claire et Paul jouent au jeu suivant: l'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé et celui qui obtient le plus grand numéro gagne.

Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

c) Finalement, il est décidé que c'est Paul qui choisit en premier. Quel(s) dé(s) a-t-il intérêt à choisir ?

d) Claire et Paul décident alors de modifier les règles. L'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chaucn leur dé deux fois de suite et celui dont la somme des numéros est la plus grande gagne.
Paul choisit en premier et il prend le dé D_2. Quel dé claire a-t-elle intérêt à choisir ?
De façon générale, avec ces nouvelles règles, Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

II - La suite de Fibonacci et des urnes

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1) Montrez, pour tout entier $n \geq 3$, que $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} < 2F_n$.

2) Soit $k \geq 4$ un entier. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes A, B et C ainsi que de $3F_k$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3F_k$. On répartit ces jetons de la façon suivante :

- Les F_{k-2} jetons de plus grands numéros sont placés dans A;
- Les F_{k-1} jetons de plus grands numéros restants sont placés dans B;
- Les F_k jetons de plus grands numéros restants sont placés dans C;
- Les F_{k-1} jetons de plus grands numéros restants sont placés dans A;
- Les F_{k-2} derniers jetons sont placés dans B.

On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros de jetons tirés dans A,B et C.

a) Démontrez les trois inégalités :

$$\mathbb{P}(X_A > X_B) > \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X_B > X_C) > \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X_C > X_A) > \frac{1}{2}.$$

b) Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un commence par choisir une des trois urnes ci-dessus et pioche un des jetons qu'elle contient. Puis l'autre joueur choisit une des autres urnes et pioche un des jetons qu'elle contient. Celui des deux qui obtient le jeton de plus grand numéro gagne.

Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

III - Urnes non transitives

Soit $n \geq 3$ un entier. On dispose de trois urnes A,B et C et de $3n$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n$. On répartit alors les jetons dans les trois urnes de sorte que chaque urne contienne n jetons. On tire alors indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectiveemnt X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C.

1) On suppose, dans cette question uniquement, que chacune des trois probabilités $\mathbb{P}(X_A > X_B)$, $\mathbb{P}(X_B > X_C)$ et $\mathbb{P}(X_C > X_A)$ est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

On dispose de trois autres urnes, D, E et F et de $3n+6$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n+6$. Les $3n$ jetons numérotés de 1 à $3n$ ont été répartis comme précédemment dans les urnes A,B et C. Les urnes D, E et F sont alors remplies de la façon suivante :

- l'urne D reçoit le contenu de l'urne A, ainsi que les jetons numérotés $3n+1$ et $3n+6$;
- l'urne E reçoit le contenu de l'urne B, ainsi que les jetons numérotés $3n+4$ et $3n+5$;
- l'urne F reçoit le contenu de l'urne C, ainsi que les jetons numérotés $3n+2$ et $3n+3$.

Chacune des urnes D, E et F contient ainsi $n+2$ jetons. On tire alors indépendamment un jeton dans chacune des urnes D, E et F, et on note respectivement X_D, X_E et X_F les numéros des jetons tirés dans D, E et F.

a) Exprimer $\mathbb{P}(X_D > X_E)$ en fonction de n et $\mathbb{P}(X_A > X_B)$.

b) Montrez que chacune des probabilités $\mathbb{P}(X_D > X_E)$, $\mathbb{P}(X_E > X_F)$ et $\mathbb{P}(X_F > X_D)$ est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

2) Soit $n \geq 3$ un entier. On note $\mathscr{H}_n$ la propriété suivante :
Il est possible de répartir $3n$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n$, dans trois urnes A, B et C de sorte que les deux conditions ci-dessous soient satisfaites.

- Chacune des trois urnes contient n jetons.
- Si l'on tire indépendamment un jeton dans chacune de ces urnes et si l'on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C, alors chacune des probabilités $\mathbb{P}(X_A > X_B)$, $\mathbb{P}(X_B > X_C)$ et $\mathbb{P}(X_C > X_A)$ est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

a) Montrez que les propriétés $\mathscr{H}_3$ et $\mathscr{H}_4$ sont vraies.

b) Montrez, pour tout entier $n \geq 3$, que $\mathscr{H}_n$ est vraie.

Problème 32: Les nombres joviaux (d'après CGL 2019)

($\star\star\star\star\star$)

Soit n et p deux entiers tels que $p \geq 2$ et $n \geq 1$. On dit que p est jovial d'ordre n s'il existe des entiers $a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$2 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n,\ a_n = p \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

Ainsi 12 est jovial d'ordre 4 car $1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12}$.

Un entier $p \geq 2$ est dit jovial s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que p soit jovial d'ordre n.

I - Quelques exemples

1) Montrez que, si l'entier p est jovial d'ordre n, alors $n \leq p-1$.

2) Existe-t-il des entiers joviaux d'ordre 2 ? Montrez que 2 et 4 ne sont pas joviaux.

3) Montrez qu'un entier premier n'est pas jovial.

4) Quel est le plus petit entier jovial ?

5) Déterminez tous les entiers joviaux d'ordre 3.

6) Soit p un entier jovial. Montrez que $2p$ et $p(p+1)$ sont joviaux.

7) Montrez que le produit de deux entiers joviaux est jovial.

II - Deux suites d'entiers

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_n = 1 + u_n \text{ et } u_{n+1} = u_n(1+u_n).$$

1) Montrez, pour tout $n \geq 3$, que u_n est un entier jovial d'ordre n.

2) Montrez que, pour tout $n \geq 1$, que $v_{n+1} = v_1 v_2 \dots v_n + 1$.

III - Un majorant optimal pour les nombres joviaux d'ordre fixé.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{H}_n$ la propriété suivante :

si $x_1, \dots, x_n$ sont des entiers strictement positifs et a un nombre rationnel strictement positif tels que :

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq a \text{ et } \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 1.$$

alors $a + 1 \leq v_{n+1}$ et $x_1 \dots x_n (a+1) \leq v_1 \dots v_n v_{n+1}$.

On se propose alors de démontrer par récurrence sur n que la propriété $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

1) Démontrez que $\mathscr{H}_1$ est vraie.

Dans les questions suivantes, on considère un entier $n \geq 2$, et on suppose que la propriété $\mathscr{H}_{n-1}$ est vraie. On considère des entiers strictements positifs $x_1, \dots, x_n$ et un nombre rationnel strictement positif a tels que :

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq a \text{ et } \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}.$$

2) Montrez que $x_1 \geq 2$ et que $a \leq x_1 x_2 \dots x_n$.

3) On suppose dans cette question que $\displaystyle\frac{1}{x_n - 1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k} \geq 1$ et que $x_n > x_{n-1}$.

a) Montrez qu'il existe un unique nombre rationnel q, strictement positif, tel que :

$$\frac{1}{q} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 1.$$

b) Montrez que $x_n - 1 \leq q$.

c) En déduire que $q + 1 \leq v_n$ puis que $x_1 x_2 \dots x_n \leq v_1 v_2 \dots v_n$.

d) En déduire que $a + 1 \leq v_{n+1}$ et $x_1 \dots x_n (a+1) \leq v_1 v_2 \dots v_n$.

4) On suppose dans cette question que $\dfrac{1}{x_n-1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{x_k}\geq 1$ et que $x_n=x_{n-1}$.

a) Montrez que $x_n\geq 4$.

b) Montrez qu'il existe deux uniques nombres rationnels, strictement positifs, r et t tels que :

$$\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n-1}=\frac{1}{x_n-2}+\frac{1}{r} \text{ et } \frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{n-2}}+\frac{1}{x_n-2}+\frac{1}{t}=1.$$

c) Montrez que $r=x_n+1+\dfrac{4x_n-2}{x_n^2-4x_n+2}$ puis que $(x_n-2)(r+1)\geq x_n^2$.

d) Montrez que $t\geq r\geq x_n$.

e) En déduire que $a+1\leq v_{n+1}$ et $x_1\ldots x_n(a+1)\leq v_1\ldots v_n v_{n+1}$.

5) On suppose dans cette question que $\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{x_n-1}<1$.

a) Montrez qu'il existe un unique nombre rationnel, strictement positif, b tel que:

$$\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{b}=1.$$

b) Montrez que $(x_n-1)(b+1)\geq x_n(a+1)$.

6) En déduire que la proposition $\mathscr{H}_n$ est vraie.
Indication: dans le cas où

$$\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n-1}<1.$$

On pourra chercher à remplacer x_n par x_n-1 et a par b.
7) Montrez, pour tout entier $n\geq 3$, que u_n est le plus grand entier jovial d'ordre n.

Problème 33: Somme de cubes (d'après CGL 2016)

$(\star\star\star\star)$

Si n est un entier, on appelle cube de n l'entier n^3.
Dans tout le problème, on note:

S l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts;
S_0 l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une

somme de cubes d'entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts;
S_1 l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts.

Par exemple, 8 et 190 sont dans S car $8 = 2^3$ et $190 = 1^3 + 4^3 + 5^3$; 216 et 1072 sont dans S_0 car $216 = 6^3$ et $1072 = 2^3 + 4^3 + 10^3$; 125 et 2568 sont dans S_1 car $125 = 5^3$ et $2568 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 13^3$.

L'objectif du problème est de démontrer que tout entier suffisamment grand appartient à S.

1) Montrez que $2016 \in S_0$.

2.a) Montrez que, pour tout réel $x \geq 5$, on a $(2x + 1)^3 \leq 2(2x - 1)^3$.

2.b) Soit k un entier supérieur ou égal à 5. Montrez, pour tout entier $p \geq k$:

$$(2p + 1)^3 \leq (2k - 1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j - 1)^3.$$

On rappelle que si t,u et v sont des entiers, la notation $t \equiv u[v]$ signifie que v divise $u - t$.

3) Montrez qu'il existe 288 entiers $s_1, \ldots, s_{288}$ appartenant à S_1 tels que $s_i \equiv i[288]$ pour tout i, et on note m le plus grand des nombres s_i:

$$m = max(s_1, s_2, \ldots, s_{288}).$$

On rappelle que n réels $u_1, \ldots, u_n$ sont dits en progression arithmétique de raison r si $u_{i+1} - u_i = r$ pour tout entier i tel que $1 \leq i < n$.

4) Soit n un entier tel que $288n \geq m$, et soit $u_1, \ldots, u_n$ des entiers naturels en progression arithmétique de raison 288. Montrez que tout entier de l'intervalle $[m + u_1, 288n + u_1]$ peut s'écrire sous la forme $s_i + u_j$, avec $1 \leq i \leq 288$ et $1 \leq j \leq n$.

5) On admet la relation, pour tout réel x:

$$(2x + 12)^3 + (2x + 4)^3 + (2x + 2)^3 - (2x + 10)^3 - (2x + 8)^3 - (2x)^3 = 288.$$

a) Montrez qu'il existe un entier u tel que u, $u+288$ et $u+576$ appartiennent à S_0.

b) Montrez que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe n éléments dans S_0 en progression arithmétique de raison 288.

6) Soit k un entier supérieur ou égal à 5 tel que $(2k + 1)^3 > m$.

a) Montrez qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout entier de l'intervalle $[N, N+2(2k-1)^3]$ puisse s'écrire sous la forme s_i+u, avec $1 \leq i \leq 288$ et $u \in S_0$.

b) Montrez que tout entier supérieur ou égal à N appartient à S.
Pour tout entier $p \geq k$, on pourra examiner le cas des entiers de l'intervalle $[N, N_p]$ où :

$$N_p = N + (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p} (2j-1)^3.$$

Problème 34: Les morphismes du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ $(\star\star\star)$

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un morphisme du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ lorsque pour tous réels x et y:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y) \text{ et } f(1) = 1.$$

Soit f un tel morphisme de corps.

1) Montrez que $f(0) = 0$ et que pour tous réels x, y l'on a $f(x-y) = f(x) - f(y)$.

2) Soit y un réel non nul. Montrez que $f(y) \neq 0$ et que $f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{f(y)}$.

3) Montrez que pour tous réels x et y, avec y non nul, $f(x/y) = f(x)/f(y)$.

4) Montrez que pour tout rationnel r, $f(r) = r$.

5) Montrez que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

6) On rappelle (cf problème 1) que tout intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ contient un rationnel. Soit x un réel quelconque, prouvez que $f(x) = x$.

7) Conclure.

Problème 35: Les premiers sont les derniers (d'après CGL 2012) $(\star\star\star\star\star)$

Pour tout entier $n \geq 2$, on dispose de la décomposition en facteurs premiers :

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

où $p_1, p_2, \dots, p_k$, qu'on suppose distincts, sont les diviseurs premiers de n, et où les exposants, $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont des entiers strictements positifs. On pose alors :

$$f(n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}.$$

Par exemple, si $n = 720 = 2^4 3^2 5^1$, on a $f(n) = 4^2 2^3 1^5 = 128$.
En posant de plus $f(1) = 1$, on obtient une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.
Enfin, pour tous entiers $n \geq 1$ et $i \geq 0$, on note:

$$f^0(n) = n \text{ et } f^{i+1}(n) = f(f^i(n)).$$

Le but du problème est d'étudier le comportement de la fonction f et des suites $(f^i(n))_{i \geq 0}$ à n fixé.

1)

a) Calculez $f(2012)$.

b) Déterminez les nombres $f^i(36^{36})$ pour $0 \leq i \leq 3$. Que peut-on dire des suivants ?

2)

a) Donnez un exemple d'entier $n \geq 1$ tel que pour tout entier naturel i, on ait :

$$f^{i+2}(n) = f^i(n) \text{ et } f^{i+1}(n) \neq f^i(n).$$

b) Montrez que f n'est ni croissante ni décroissante.

3) Résoudre les équations suivantes:

- a) $f(n) = 1$
- b) $f(n) = 2$
- c) $f(n) = 4$

4)

a) Pour tous entiers $a \geq 2$ et $b \geq 0$, montrez que $ab \leq a^b$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ des entiers tels que $a_i \geq 2$ et $b_i \geq 0$ pour tout i. Montrez que :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k \leq a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_k^{b_k}.$$

c) Pour tout entier naturel non nul n, montrez que : $f(f(n)) \leq n$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez qu'il existe un entier naturel r tel que, pour tout entier $i \geq r$, on ait $f^{i+2}(n) = f^i(n)$.

5) Soit E l'ensemble des entiers $n \geq 2$ n'ayant que des exposants strictement supérieurs à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.

a) Montrez que pour tout entier $a \geq 2$, il existe des entiers naturels α et β tels que $a = 2\alpha + 3\beta$.

b) En déduire que si $n \in E$ alors il existe un élément $m \in E$ tel que $f(m) = n$.

c) Donnez un élément $m \in E$ tel que $f(m) = 2012^{2012}$.

d) Que peut-on dire de la réciproque de 5.b ?

Problème 36: Les nombres de Catalan ($\star\star\star$)

Soit f la fonction définie pour tous réels $x \in]-\infty, \frac{1}{4}[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

1) Redémontrez la formule de Leibniz.

Soit $n \geq 1$. On introduit un réel C_n tel que la dérivée n-ème de f s'écrive :

$$f^n : x \in \mathbb{R} \mapsto n! C_n (1-4x)^{\frac{1}{2}-n}.$$

2) Calculez C_1, C_2 et C_3.

3) Donnez une relation entre C_n et C_{n+1}.

4) En déduire que $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

5) Vérifiez que pour tout réel x de $]-\infty, \frac{1}{4}[$, on a $f(x)^2 = f(x) - x$.

6) Soit $n \geq 2$. En dérivant n fois la relation de la question 5, montrez que:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k C_{n-k}.$$

7) On pose désormais $C_0 = 1$. Vérifiez que cela a un sens.

8) Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n \geq 3^{n-2}.$$

9) En informatique, un arbre binaire est une structure de données qui peut se représenter sous la forme d'une hiérarchie dont chaque élément est appelé nœud, le nœud initial étant appelé racine. Dans un arbre binaire, chaque élément possède au plus deux éléments fils au niveau inférieur, habituellement appelés gauche et droit. Du point de vue de ces éléments fils, l'élément dont ils sont issus au niveau supérieur est appelé père.

Au niveau le plus élevé, niveau 0, il y a un nœud racine. Au niveau directement inférieur, il y a au plus deux nœuds fils. En continuant à descendre aux niveaux inférieurs, on peut en avoir quatre, puis huit, seize, etc. c'est-à-dire la suite des puissances de deux. Un nœud n'ayant aucun fils est appelé feuille.

Combien y a-t-il d'arbres binaires à $n+1$ feuilles ?

Problème 37: Autour des valeurs d'adhérence (d'après AGREG interne 2012) ($\star\star\star\star\star$)

Le sujet suivant est extrait d'un sujet d'agreg externe adapté. Il propose de s'intéresser à la notion de valeur d'adhérence d'une suite en passant par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Dans toute la suite, si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante et $u = (u_n)$ une suite, on dira que la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si, par ailleurs :

$$u_{\phi(n)} \to l \in \mathbb{R}$$

on dira que l est un valeur d'adhérence de u. On notera, enfin, $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

Partie I: Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Dans cette partie, on se donne $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On cherche à montrer que u admet une valeur d'adhérence. 1) En considérant l'ensemble :

$$E = \{N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \implies u_n > N)\}$$

montrez que u admet soit une sous-suite croissante, sois une sous-suite décroissante.

2) Conclure.

3) En déduire une preuve du cas où u est une suite complexe. (une suite complexe est bornée si et seulement si son module est bornée).

4) Soit (a_n) et (b_n) deux suites bornées.
Montrez qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(a_{\phi(n)})$ et $(b_{\phi(n)})$ convergent.

5) Montrez le résultat précédent dans le cas de $N \geq 2$ suites bornées au lieu de 2.

On admettra par la suite que ce résultat reste vrai si l'on a une infinité de suites bornées au lieu d'un nombre fini (raisonnement diagonal de Cantor).

Partie II: Valeurs d'adhérence

Soit $x = (x_n) \in \mathbb{R}^N$.

1) Calculez $V(x)$ lorsque x est une suite convergente.

2) Si x est bornée, montrez que $V(x) \neq \emptyset$.

3) Démontrez que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$n = 2^p + k \text{ et } k < 2^p.$$

Exprimer p et k à l'aide de la fonction partie entière.
Dans la suite, on notera $p = p_n$ et $k = k_n$.
4) Démontrez que tous les entiers naturels q sont des valeurs d'adhérence de la suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Pour $q \in \mathbb{N}$ fixé, précisez une suite $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que :

$$\lim_{n \to \infty} k_{\phi(n)} = q.$$

5) Montrez que (p_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

6) Soit $x = (x_n)$ définie par $x_n = \dfrac{k_n}{2^{p_n}}$. Soit $a \in [0, 1[$. Prouvez que $n \mapsto \lfloor 2^n a \rfloor$ est croissante et strictement croissante à partir d'un certain rang.

7) Montrez que :

$$\lim_{n \to \infty} x_{\lfloor 2^n a \rfloor + 2^n} = a.$$

8) Prouvez que $[0, 1[\subset V(x)$.

9) Conclure que $V(x) = [0, 1]$.

10) En déduire une suite $u = (u_n)$ telle que $V(u) = \mathbb{R}$.

Remarque: On a donc trouvé une suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{R}$. Cela signifie que cette suite va arbitrairement proche de tout réel une infinité de fois. Une question que l'on pourrait se poser est de savoir si n'importe quelle partie de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle. En réalité il n'en est rien: il n'existe aucune suite u telle que $V(u) = \mathbb{Q}$. Cela peut se voir par des considérations topologiques affirmant que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un "fermé" tandis que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas. (une façon plus simple de le voir passe par l'utilisation du bon sens et d'un dessin...)

Pour la culture, un exercice d'oral posé à Ulm proposait de déterminer $V(u)$ où $u = (\{\ln(n!)\})_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour tout réel x, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.

Problème 39: Un théorème de Beatty ($\star\star\star\star$)

On rappelle que la suite de Fibonacci (F_n) est définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Soit X un ensemble. On dit que les deux parties A et B de X en forment une partition si X est réunion disjointe de A et de B i.e $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = X$.

Soit $a \in]1, \infty[$. On note :

$$E_a = \{\lfloor na \rfloor, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Soit $a, b \in]1, \infty[$. On cherche à montrer le **Théorème de Beatty** suivant:

$$\begin{gathered} E_a \text{ et } E_b \text{ forment une partition de } \mathbb{N}^* \\ \iff \\ a \text{ et } b \text{ sont irrationnels et } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1. \end{gathered}$$

1) Déterminez les deux réels ϕ et ψ et deux réels a et b tels que $\phi > \psi$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = a\phi^n + b\psi^n.$$

2) Déterminez un équivalent simple de F_n et déterminez la limite de $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

Soit $a, b \in]1, \infty[$.

3) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_a(m) = \text{Card}\{p \in E_a, p \leq m\}.$$

4) Établir que pour tout entier naturel non nul m :

$$\frac{m+1}{a} - 1 \leq f_a(m) < \frac{m+1}{a}$$

Que dire de la première inégalité si a est irrationnel ?

5) En déduire que la suite $(\dfrac{f_a(m)}{m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

6) On suppose dans cette question que E_a et E_b forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrez que : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

b) Montrez que $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel. En déduire que a et b le sont aussi.

7) On suppose ici que a et b sont irrationnels et que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

a) Montrez que $E_a \cap E_b = \emptyset$.

b) Soit m un entier naturel non nul. Établir:

$$m - 1 < f_a(m) + f_b(m) < m + 1.$$

en déduire que $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$.

8) Montrez que E_ϕ et E_{ϕ^2} forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Problème 40: Les nombres algébriques ($\star\star\star\star\star$)

On considère ici la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-(k!)}$$

(a) Donner l'écriture décimale de u_1, u_2, u_3 et u_4.
(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.
On rappelle que : toute suite de réels croissante et majorée converge. On appelle alors $\ell = \lim (u_n)$.

3. On suppose que α est algébrique, non rationnel.

Pour unifier les notations, on notera $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $\forall k \in [\![0, n]\!], n \geqslant 2$ et $a_k \in \mathbb{Z}$ et on suppose que $f(\alpha) = 0$ On étudie ici les propriétés de f

(a) On suppose que f admet une racine rationnelle $\dfrac{p}{q}$ (écriture irréductible : $p \wedge q = 1$). Montrer qu'il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré $n-1$, tel que $g(\alpha) = 0$

(b) On suppose que α est racine d'ordre $p(\leqslant n)$ de f. Donner un polynôme de degré $n-p+1$ à coefficients entiers tel que α est racine d'ordre 1 de ce polynôme.

On peut donc supposer pour la suite de problème que :

- f est un polynôme de degré n
- α est racine d'ordre 1 de f
- $M_\alpha = f'(\alpha) > 0$ (sinon on considère $-f$)
- f n'admet aucune racine rationnelle.

4. Transcendance de α.

On admet, par continuité de f' et de f, qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

- pour $x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta], f'(x) < 2M$.
- pour $x \in [\alpha - \eta, \alpha[, f(x) < 0$ et pour $x \in]\alpha, \alpha + \eta], f(x) > 0$

(a) Soit $\varphi : x \mapsto 2M(\alpha - x) + f(x)$, dérivable sur $\mathbb{R}$.
En étudiant les variations de φ sur $[\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, montrer que

$$\forall x \in [\alpha - \eta, \alpha], \quad \alpha - x \geqslant \frac{1}{2M}|f(x)|$$

(b) Soit $r = \dfrac{p}{q} \in [\alpha - \eta, \alpha] \cap \mathbb{Q}$, un nombre rationnel. Monter que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) > \dfrac{1}{q^n}$.

(c) (Dur) En déduire que α est un nombre transcendant.

Problème 41: Une suite de Sylvester ($\star\star\star\star$)

On appelle suite de Sylvester la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_0 = 2$ et $s_{n+1} = s_0 \dots s_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose alors $t_n = s_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Montrer que s_n est un entier supérieur à $n+2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1 \quad$ et en déduire une expression analogue de t_{n+1} en fonction de t_n.

c) Simplifier $\dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{s_k}$.

2. On pose $q_n = \dfrac{\ln t_n}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ pour lesquels $p \geqslant n$: $\quad q_p = q_n + \displaystyle\sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{4t_k^2}\right)$.

b) En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif q_∞.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant q_\infty - q_n \leqslant \dfrac{1}{4t_n^2 2^n}$.

On pose $\alpha = \mathrm{e}^{q_\infty}$. Pour information, α vaut 1,5979 à 10^{-4} près.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant \alpha^{2^n} - t_n \leqslant t_n \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4t_n^2}} - 1\right)$, puis en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\alpha^{2^n} - s_n\right)$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels pour laquelle $a_0 \geqslant 2$ et $a_{n+1} \geqslant a_n^2 - a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $x_n = a_0 \dots a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on note y_n l'entier pour lequel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{y_n}{x_n}$ après mise au même dénominateur.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n \geqslant s_n$.

b) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.

On pose à présent $u_n = \dfrac{y_n}{x_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k}$ et $v_n = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n - u_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} + \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

c) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5. On suppose dans cette question que ℓ est rationnel, i.e. que $\ell = \dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la suite $(px_n - qy_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle est stationnaire.

b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, puis qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ pour tout $n \geqslant N$.

6. Montrer que pour tous $p, q \geqslant 2$ entiers, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{q^k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{q^k}}$ est un irrationnel.